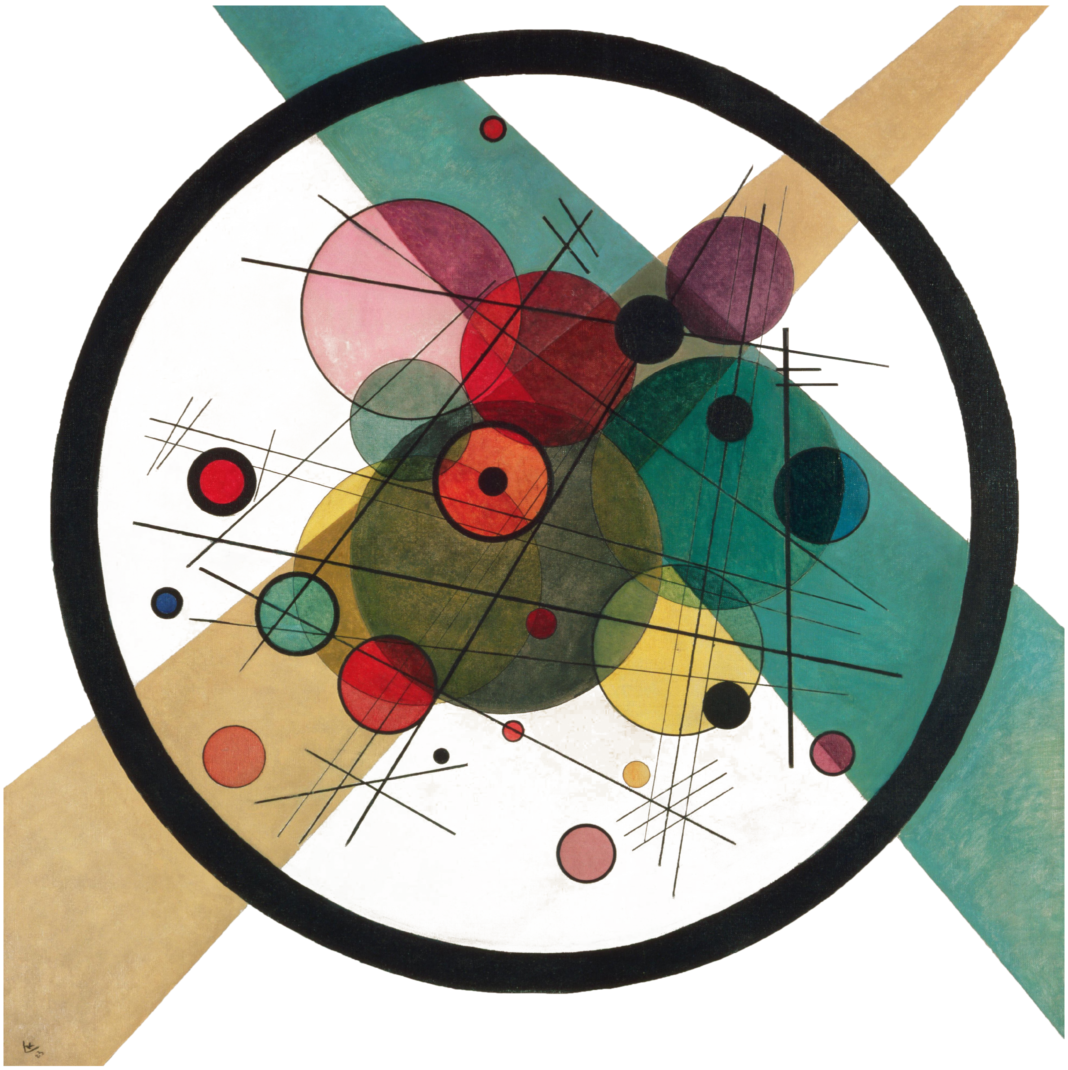
Maxwell et les symétries généralisées

Stage dans le Service de Physique Mathématique et Théorique



Sous la direction de Riccardo Argurio

Antoine Dierckx

ULB, Belgique

2024

Table des matières

Résumé

Dans ce stage, nous allons aborder la théorie de Maxwell sous l'angle des symétries généralisées. Dans un premier temps, nous rappellerons quelques résultats mathématiques ainsi que la théorie de Maxwell dans sa formulation covariante et en terme de forme.
Ensuite, nous aborderons les symétries « ordinaires » afin de préparer le terrain à la dernière partie de ce stage : les symétries généralisées.
Nous conclurons par l'application de celles-ci à la théorie de Maxwell, avec une brève discussion sur les groupes de jauges.

Remerciements

J'aimerais remercier tout particulièrement Riccardo Argurio pour sa patience et ses relectures toujours attentives.
J'aimerais également remercier Romain Vandepopeliere pour son aide et ses explications.

> « La crisi consiste appunto nel fatto che il vecchio muore e il nuovo non può nascere : in questo interregno si verificano i fenomeni morbosi più svariati. »
> *Antonio Gramsci*[1]

Première partie

Introduction

Dans cette première partie, nous rappelons le concept de formes différentielles, et reformulons la théorie de Maxwell en terme de formes.

1 Rappels mathématiques

Les formes différentielles permettent de décrire des propriétés géométriques sur des variétés, de manière indépendante des coordonnées. Nous nous basons sur les définitions et propriétés présentes dans [2] et [3].

Définition 1.1 (Fibré tangent). Soit $\mathcal{M}$ une variété de dimension d, et $T_p\mathcal{M}$ l'espace vectoriel en un point $p \in \mathcal{M}$. On définit le fibré tangent comme

$$T\mathcal{M} \mathrel{\widehat{=}} \bigcup_p T_p\mathcal{M} \tag{1.1}$$

Définition 1.2 (p-forme). Soit $\mathcal{M}$ une variété de dimension d. On définit la forme différentielle de rang p (ou *p-forme*) ω comme un tenseur de type $(0, p)$ totalement anti-symétrique :

$$\omega \colon T\mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1.2}$$

$$(X_1, \ldots, X_p) \mapsto \omega(X_1, \ldots, X_p) \tag{1.3}$$

En terme de composantes, on a :

$$\omega \mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \tag{1.4}$$

Notation 1.3. On note l'espace des p-formes par $\Omega^p(\mathcal{M})$

On peut définir deux opérations importantes sur ces p-formes. La première est une notion de dérivée.

Définition 1.4 (dérivée extérieure). Soit ω une p-forme différentielle. On définit sa dérivée extérieure selon :

$$d \colon \Omega^p \longrightarrow \Omega^{p+1} \tag{1.5}$$

$$\omega \mapsto (d\omega) \mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{p!}\partial_\nu \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \tag{1.6}$$

En terme de composante, on a

$$(d\omega)_{\nu\mu_1 \ldots \mu_p} = (p+1)\partial_{[\nu}\omega_{\mu_1 \ldots \mu_p]}$$

Propriété 1.1. *La deuxième dérivée d'une forme différentielle est identiquement nulle*

$$d^2\omega = 0 \tag{1.7}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
d^2\omega &= d\left\{\frac{1}{p!}\partial_\nu \omega_{\mu_1\ldots\mu_p} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}\right\} \\
&= \frac{1}{(p+1)!}\frac{1}{p!}\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p} dx^{\nu_1} \wedge dx^{\nu_2} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \\
&= -\frac{1}{(p+1)!}\frac{1}{p!}\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p} dx^{\nu_2} \wedge dx^{\nu_1} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \\
&\iff d^2\omega = 0
\end{aligned}$$

La deuxième est une opération duale.

Définition 1.5 (Étoile de Hodge). Soit $\mathcal{M}$ une variété Riemannienne de dimension d, et ω une p-forme différentielle. On définit l'étoile de Hodge selon

$$\star\colon \Omega^p \longrightarrow \Omega^{d-p} \tag{1.8}$$

$$\omega \mapsto (\star\omega)_{d-p} \widehat{=} \frac{1}{p!}\frac{1}{(d-p)!}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\mu_{p+1}\ldots\mu_d} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_d} \tag{1.9}$$

En terme de composantes, on a :

$$(\star\omega)_{\mu_1\ldots\mu_{n-p}} = \frac{1}{p!}\epsilon^{\nu_1\ldots\nu_p}{}_{\mu_1\ldots\mu_{d-p}}\omega_{\nu_1\ldots\nu_p}$$

Définition 1.6. Une p-forme ω est dite *fermée* si

$$d\omega = 0$$

et elle est dite *exacte* si il existe une (p-1)-forme η telle que

$$\omega = d\eta$$

Propriété 1.2. *Toute forme exacte est fermée*

Propriété 1.3. *Soit $\mathcal{M}$ une variété pseudo-Riemanienne de signature $(1, s)$. On a la propriété suivante :*

$$\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_r\mu_{r+1}\cdots\mu_n}\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_r\nu_{r+1}\ldots\nu_n} = (-1)^s r!(n-r)!\delta^{\mu_{r+1}}_{[\nu_{r+1}}\cdots\delta^{\mu_n}_{\nu_n]} \tag{1.10}$$

2 Théorie de Maxwell

2.1 Formulation tensorielle des équations de Maxwell

On considère l'action suivante :

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \right\} \tag{2.1}$$

où $F^{\mu\nu} \mathrel{\widehat{=}} 2\partial^{[\mu} A^{\nu]}$ En imposant que $\delta S = 0$ sous la variation

$$A^\mu \mapsto A^\mu + \delta A^\mu$$

On trouve les équations du mouvement suivantes :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\mu \tag{2.2}$$

De plus, les identités de Bianchi sous automatiquement respectées pour $F^{\mu\nu} = 2\partial^{[\mu} A^{\nu]}$:

Propriété 2.1 (Identités de Bianchi).

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\sigma]} = 0 \tag{2.3}$$

2.2 Formulation en terme de formes différentielles

Cette section se base sur les résultats présents dans [4]. Afin de traduire la théorie de Maxwell dans le langage des formes différentielles, on commence par associer les objets de la théorie aux composantes de p-formes :

Définition 2.1. On associe le tenseur de Maxwell aux composantes de la 2-forme

$$F \mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.4}$$

Similairement, on associe le potentiel et le courant à des covecteurs :

$$A \mathrel{\widehat{=}} A_\mu dx^\mu \tag{2.5}$$

$$J_1 \mathrel{\widehat{=}} J_\mu dx^\mu \tag{2.6}$$

2.2.1 Identités de Bianchi

Propriété 2.2. *L'identité de Bianchi se réécrit sous la forme*

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\sigma]} = 0 \iff dF = 0$$

En effet,

$$0 = (dF)_{\sigma\mu\nu} = (2+1)\partial_{[\sigma} F_{\mu\nu]} \tag{2.7}$$

2.2.2 Équations du mouvement

Commençons par remarquer que

$$\begin{aligned}
(\star F)_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \\
(d\star F)_{\sigma\mu\nu} &= \frac{2+1}{2!}\partial_{[\sigma}\epsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu]}F_{\alpha\beta} \\
&= \frac{3}{2}\epsilon_{\alpha\beta[\mu\nu}\partial_{\sigma]}F^{\alpha\beta} \\
(\star d\star F)^{\rho} &= \frac{1}{3!}\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\frac{3}{2}\epsilon_{\alpha\beta[\mu\nu}\partial_{\sigma]}F^{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{4}\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\partial_{\sigma}F^{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{4}(-1)^3 4\delta^{\rho}_{[\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta]}\partial_{\sigma}F^{\alpha\beta} \\
&= -\partial_{\sigma}F^{\rho\sigma} \\
&= \partial_{\sigma}F^{\sigma\rho}
\end{aligned}$$

Montrons à présent que

$$d\star F = \star J_1 \tag{2.8}$$

se réduit effectivement aux équations de Maxwell en prenant le dual de Hodge de 2.8 :

$$\star d\star F = \star\star J = (-1)^{2(4-2)}J_1 = J_1 \tag{2.9}$$

En effet, comme son nom l'indique, l'étoile de Hodge est une opération duale :

Propriété 2.3. *Soit J_1 une 1-forme. On a*

$$(\star\star J_1)^{\mu} = (\star(\star J_1)_{\alpha\beta\gamma})^{\mu} = (\star(\frac{1}{3!}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}J^{\delta}))^{\mu} = \frac{1}{3!}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}J^{\delta} = \frac{3!(4-3)!}{3!}\frac{1}{(-1)^2}\delta^{\mu}_{\delta}J^{\delta} = J^{\mu} \tag{2.10}$$

En composantes, l'équation 2.2.2 devient

$$(\star d\star F)^{\nu} = J^{\nu} \iff \partial_{\mu}F^{\mu\nu} = J^{\nu} \tag{2.11}$$

Montrons à présent que si F dérive d'un potentiel, les identités de Bianchi sont satisfaites. En effet :

$$F = dA \implies dF = d^2A = 0 \tag{2.12}$$

2.2.3 Principe de moindre action

Reformuler la théorie de Maxwell en langage de forme différentielle constitue une étape intermédiaire, qui facilitera la généralisation des symétries ordinaires vers des symétries d'ordre supérieur. On considère une 1-forme A ayant une symétrie de jauge $A \mapsto A + d\alpha$, α étant une 0-forme. On considère également la 1-forme J_1 (définie en 2.6) qui satisfait l'équation de continuité :

$$d\star J_1 = 0 \tag{2.13}$$

Enfin, on définit la 2-forme exacte $F = dA$.

Propriété 2.4. *Les équations du mouvement*

$$d\star F = \star J_1 \tag{2.14}$$

peuvent être dérivée de l'action suivante :

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{M}}\left\{\frac{1}{2}F\wedge\star F - A\wedge\star J_1\right\} \tag{2.15}$$

Preuve. Premièrement, constatons que F est bien invariante de jauge : $F = dA \mapsto F' = dA' = d(A + d\alpha) = dA + d^2\alpha = dA = F$.
Rappelons également la règle de Leibniz pour la dérivée extérieure :

$$d(\omega_p \wedge \omega_k) = d\omega_p \wedge \omega_k + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_k$$

Ainsi, un intégration par partie donne

$$\begin{aligned}\int d\omega_p \wedge \omega_k &= \int d(\omega_p \wedge \omega_k) - \int (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_k \\ &= \int (-1)^{p+1} \omega_p \wedge d\omega_k + \text{terme de dérivé totale}\end{aligned}$$

Notons également que le produit extérieur respecte la relation d'anticommutation graduée :

$$\omega_p \wedge \omega_k = (-1)^{pk} \omega_k \wedge \omega_p$$

Ensuite calculons la variation de l'action :

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\mathcal{M}} \Big\{ \frac{1}{2} d\delta A \wedge \star F + \frac{1}{2} F \wedge \star d\delta A - \delta A \wedge \star J_1 \Big\} \\ &= \int_{\mathcal{M}} \Big\{ \frac{(-1)^{1+1}}{2} \delta A \ \wedge d \star F + \frac{(-1)^{2\cdot(4-2)}}{2} \star d\delta A \wedge F - \delta A \wedge \star J_1 \Big\} \\ &= \int_{\mathcal{M}} \Big\{ \frac{1}{2} \delta A \ \wedge d \star F + \frac{1}{2} \star d\delta A \wedge F - \delta A \wedge \star J_1 \Big\} \\ &= \int_{\mathcal{M}} \Big\{ \frac{1}{2} \delta A \ \wedge d \star F + \frac{(-1)^{2(4-2)}}{2} d\delta A \wedge \star F - \delta A \wedge \star J_1 \Big\} \\ &= \int_{\mathcal{M}} \Big\{ \frac{1}{2} \delta A \ \wedge d \star F + \frac{(-1)^{1+1}}{2} \delta A \wedge d \star F - \delta A \wedge \star J_1 \Big\} \\ &= \int \delta A \Big\{ \wedge d \star F - \wedge \star J_1 \Big\} \\ &\overset{!}{=} 0 \ \forall \delta A \iff d \star F = \star J_1\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait, que pour deux formes ω , η de degré k, $\star\omega \wedge \eta = (-1)^{k(n-k)} \omega \wedge \star\eta$ [1]

1. voir exo 4 de la section 4.8.4 de [5].

Deuxième partie

Symétries ordinaires

Nous rappelons ici certaines propriétés des symétries ordinaires, en théorie des champs classique et quantique. Cette partie se base majoritairement sur [6] et [7].

3 Symétrie ordinaire en théorie des champs classique

Considérons l'action

$$\mathcal{S} = \int d^D x \mathcal{L}[\phi^i, \phi^i_\mu, \dots] \tag{3.1}$$

Sous une transformation globale $\phi^i \mapsto \phi^i + \epsilon_a \delta\phi^i_a$, on assume l'action invariante (à des termes de dérivées totales près). En localisant le paramètre $\epsilon_a \mapsto \epsilon_a(x)$, la transformation n'est plus une symétrie de l'action $\mathcal{S}$. Sous cette transformation, l'action varie selon

$$\delta\mathcal{S} = \int d^D x J^\mu_a \partial_\mu \epsilon_a \tag{3.2}$$

En intégrant par partie, en négligeant les termes aux bords et en s'intéressant aux équations du mouvement (c-à-d la configuration des champs qui minimise l'action), on trouve que les coefficients J^μ_a sont les courants conservés : $\partial_\mu J^\mu_a = 0$.

Définition 3.1 (Charges de Noether). Cette propriété permet de définir les charges de Noether :

$$Q_a \mathrel{\widehat{=}} \int d^{D-1}x \; J^0_a \tag{3.3}$$

Par construction, ces charges sont constantes dans le temps. Par ailleurs, les courants ne sont pas uniquement déterminés :

$$J^\mu_a \mapsto \tilde{J}^\mu_a - \partial_\nu \Omega^{\mu\nu}_a \text{ tel que } \Omega^{\mu\nu}_a = -\Omega^{\nu\mu}_a \text{ donnera la même charge}$$

En effet,

$$\delta_\Omega(Q_a) = \tilde{Q}_a - Q_a = \int d^{D-1}x \; \tilde{J}^0_a - J^0_a = \int d^{D-1}x \; \partial_\nu \Omega^{0\nu}_a = \int d^{D-1}x (\partial_0 \Omega^{00}_a + \partial_i \Omega^{0i}_a) = \Omega^{0i}_a \Big|_{\text{bords}}$$

Ω^{00}_a étant identiquement nul par antisymétrie et $\Omega^{0i}_a\Big|_{\text{bords}}$ s'annulant par hypothèse.

Théorème 3.1. *Le théorème de Noether stipule qu'à toute symétrie continue de l'action d'un système physique correspond une quantité conservée*

4 Symétrie ordinaire en théorie des champs quantique

4.1 Formalisme canonique

Pour les symétries continues, on peut construire l'opérateur unitaire implémentant la transformation des champs par exponentiation de la charge de Noether :

$$U = \exp\{i\epsilon_a Q_a\} \tag{4.1}$$

La transformation agit selon

$$\begin{aligned} \phi^i \mapsto \phi'^i \mathrel{\widehat{=}} U \, \phi^i \, U^{-1} &\approx (\mathbf{1} + i\epsilon_a Q_a)\phi^i(\mathbf{1} - i\epsilon_a Q_a) \\ &\approx \phi^i + i\epsilon_a \big[Q_a, \phi^i\big] \end{aligned}$$

On en tire $\delta\phi^i = i\epsilon_a \big[Q_a, \phi^i\big]$.

4.2 Intégrale de chemin et identités de Ward

On considère la fonction de partition

$$Z \mathrel{\widehat{=}} \int \mathfrak{D}\phi^i \exp\{i\mathcal{S}\} \tag{4.2}$$

Définition 4.1. Les fonctions de corrélation d'une observable $X \equiv \prod_{i,j} \phi^i(x_j)$ sont données par

$$\langle X \rangle \mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{Z} \int \mathfrak{D}\phi^i \; X \; \exp\{i\mathcal{S}\} \tag{4.3}$$

La généralisation de la conservation du courant de Noether aux théories des champs quantiques est donnée par les identités de Ward.

Propriété 4.1 (Identités de Ward–Takahashi). *Considérons l'observable $\langle \hat{O}_1 \dots \hat{O}_n \rangle \mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{Z} \int \mathfrak{D}\phi^i \; \hat{O}_1 \dots \hat{O}_n \; \exp\{i\mathcal{S}[\phi]\}$. Sous une transformation $\delta\phi = \alpha\Delta\phi$, on a :*

$$\begin{aligned}\langle \partial_\mu J^\mu(x) \hat{O}_1(x_1) \dots \hat{O}_n(x_n) \rangle = {} & i\delta^{(4)}(x - x_1) \langle \Delta\hat{O}_1(x_1) \dots \hat{O}_n(x_n) \rangle \\ & + i\delta^{(4)}(x - x_2) \langle \hat{O}_1(x_1) \Delta\hat{O}_2(x_2) \dots \hat{O}_n(x_n) \rangle + \dots \\ & + i\delta^{(4)}(x - x_n) \langle \hat{O}_1(x_1) \dots \Delta\hat{O}_n(x_n) \rangle \end{aligned} \tag{4.4}$$

Preuve. Sous une variation $\delta\phi = \alpha\Delta\phi$, une observable O se transforme comme $\delta O = \alpha\Delta O$. Pour une mesure invariante $\mathfrak{D}\phi \mapsto \mathfrak{D}\phi' = \mathfrak{D}\phi$, cette variation doit laisser la valeur $\langle \hat{O}_1(x_1) \dots \hat{O}_n(x_n) \rangle$ constante. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \int \mathfrak{D}\phi \delta \Big[O_1 \dots O_n e^{iS} \Big] \\ & = \int \mathfrak{D}\phi \Big\{ \big(\delta O_1 \dots O_n + \dots + O_1 \dots \delta O_n + O_1 \dots O_n i\delta S \big) e^{iS} \Big\} \\ & = \int \mathfrak{D}\phi \Big\{ \big(\alpha(x_1)\Delta O_1 \dots O_n + \dots + O_1 \dots \alpha(x_n)\Delta O_n + \int d^4x \; O_1 \dots O_n \cdot i\alpha(x)\partial_\mu J^\mu \big) e^{iS} \Big\} \\ & = \alpha(x_1) \langle \Delta O_1 \dots O_n \rangle + \dots + \alpha(x_n) \langle O_1 \dots \Delta O_n \rangle + i \int d^4x \; \alpha(x) \langle \partial_\mu J^\mu \cdot O_1(x_1) \dots O_N(x_n) \rangle \\ & = \int d^4x \, \alpha(x) \Big\{ \delta(x - x_1) \langle \Delta O_1 \dots O_n \rangle + \dots + \delta(x - x_n) \langle O_1 \dots \Delta O_n \rangle + i \langle \partial_\mu J^\mu \cdot O_1 \dots O_n \rangle \Big\} \\ & = 0 \quad \forall \alpha(x) \iff \delta(x - x_1) \langle \Delta O_1 \dots O_n \rangle + \dots + \delta(x - x_n) \langle O_1 \dots \Delta O_n \rangle = -i \langle \partial_\mu J^\mu \cdot O_1 \dots O_n \rangle \end{aligned}$$

$\square$

On voit que la conservation du courant n'annule la fonction corrélatrice que dans le cas où x ne rencontre pas la localisation $\{x_1, \dots x_n\}$ des autres opérateurs.

4.3 Background gauge field

Afin de jauger une symétrie (i.e. la rendre locale), on introduit un *background gauge field* qui couple au courant conservé.

$$S \mapsto S + i\int B_1 \wedge \star J_1$$

Prenons pour exemple QED, où la localisation de la symétrie $U(1)$ se fait pas l'introduction d'un champ A_μ

$$S \mapsto S + \int A_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \int A_1 \wedge \star J_1^\psi$$

La conservation du courant entraîne l'invariance de l'action sous $B_1 \mapsto B_1 + d\lambda$. En effet,

$$\delta_\lambda S = i\int d\lambda \wedge \star J_1 = -i\int \lambda \wedge d\star J_1 = 0$$

L'introduction de ce champ de jauge permet de transférer la question de la conservation du courant vers la question de l'invariance de l'intégrale de chemin :

$$Z[B_1 + d\lambda] = \int \mathfrak{D}\phi^i \exp\left\{i\mathcal{S}[\phi^i] + i\int B_1 \wedge \star J_1 + i\int d\lambda \wedge \star J_1\right\} = \int \mathfrak{D}\phi^i \exp\left\{i\mathcal{S}[\phi^i] + i\int B_1 \wedge \star J_1\right\} = Z[B_1] \tag{4.5}$$

4.4 Symmetry defect operator

Nous traitons ici le cas particulier d'un groupe abélien. Considérons un opérateur local $\mathcal{O}_R(x)$ qui se transforme sous le groupe G avec la représentation R. Alors pour $g \in G$, on a

$$g\Big[\mathcal{O}_R(x)\Big] = R(g)^j{}_k \mathcal{O}_R(x)^k(x)$$

En particulier, pour un élément proche de l'identité $g = 1 + i\lambda T + O(\lambda^2)$, les identités de Ward 4.4 nous donnent :

$$\delta(x-y)R\big[T\big]\Big\langle \mathcal{O}_R(y)\Big\rangle = \Big\langle \partial_\mu j^\mu(x)\mathcal{O}_R(y)\Big\rangle$$

En intégrant le courant conservé sur l'espace, on trouve

$$Q(\Sigma_{d-1}) = \int_{\Sigma_{d-1}} j^\mu(x)\hat{n}_\mu d^{d-1}x = \int_{\Sigma_{d-1}} \star j_1 \tag{4.6}$$

où $\hat{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface Σ_{d-1}, supposée sans bord.

Définition 4.2 (Symmetry defect operator). On définit l'opérateur unitaire suivant

$$U_g(\Sigma_{d-1}) = \exp\left\{i\lambda \int_\Sigma \star j_1\right\} = \exp\left\{i\lambda\int_{\Sigma_{d-1}} j^\mu(x)\hat{n}_\mu d^{d-1}x\right\} \tag{4.7}$$

où $g = e^{i\lambda T}$

Pour que l'opérateur $U_g(\Sigma_{d-1})$ implémente une symétrie, on requiert qu'il satisfasse la loi de multiplication interne.

Propriété 4.2 (Loi de multiplication). *Soit $g,h \in G$ et $U_g(\Sigma_{d-1})$ un SDO. Alors*

$$U_g(\Sigma_{d-1}) \cdot U_h(\Sigma_{d-1}) = U_{gh}(\Sigma_{d-1}) \tag{4.8}$$

4.5 Aspect topologique des *SDO*

La conservation du courant (ou de manière équivalente la co-fermeture de la forme j_1 : $d\star j_1 = 0$) donne un caractère topologique à l'opérateur $U_g(\Sigma_{d-1})$: il ne dépend que du choix de l'hypersurface Σ_{d-1}, modulo une homotopie.
Soit Σ_{d-1} et Σ'_{d-1} deux surfaces homotopes, et $\hat{\Sigma}$ le volume compris entre Σ_{d-1} et Σ'_{d-1}, avec $\partial\hat{\Sigma} = \Sigma'_{d-1} - \Sigma_{d-1}$. On a :

$$\begin{aligned}
U_g(\Sigma_{d-1}) \cdot U_{g^{-1}}(\Sigma'_{d-1}) &= \exp\Big\{ i\lambda \int_{\Sigma} \star j_1 - i\lambda \int_{\Sigma'} \star j_1 \Big\} \\
&= \exp\Big\{ i\lambda \Big(\int_{\Sigma} \star j_1 - \int_{\Sigma'} \star j_1 \Big) \Big\} \\
&= \exp\Big\{ i\lambda \int_{\partial\hat{\Sigma}} \star j_1 \Big\} \\
&= \exp\Big\{ i\lambda \int_{\hat{\Sigma}} d\star j_1 \Big\}
\end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème de Stokes. En l'absence d'opérateur chargé, on trouve

$$U_g(\Sigma_{d-1}) \cdot U_{g^{-1}}(\Sigma'_{d-1}) = \mathbb{1} \tag{4.9}$$

On appelle une telle propriété une *invariance topologique* de l'opérateur $U_g(\Sigma_{d-1})$.

4.6 Action d'un *SDO*

Propriété 4.3. *L'action de $U_g(\Sigma_{d-1})$ sur un opérateur $\mathcal{O}_R(x)$ est implémentée en un point x lorsque la surface Σ_{d-1} se déforme continûment en Σ'_{d-1} en passant à travers le point x :*

$$U_g(\Sigma_{d-1})\mathcal{O}_R(x) = R[g] \cdot \mathcal{O}_R(x) U_g(\Sigma'_{d-1}) \tag{4.10}$$

Explicitons ce résultat :

$$\begin{aligned}
U_g(\Sigma_{d-1})\mathcal{O}_R(x)U_{g^{-1}}(\Sigma'_{d-1}) &= \exp\Big\{ i\lambda \int_{\hat{\Sigma}} d\star j_1 \Big\} \cdot \mathcal{O}_R(y) \\
&= \exp\Big\{ i\lambda \int_{\hat{\Sigma}} \partial_\mu j^\mu(y) \Big\} \cdot \mathcal{O}_R(y) \\
&= \sum_k \frac{(i\lambda)^k}{k!} \Big(\int_{\hat{\Sigma}} \partial_\mu j^\mu(y) \Big)^k \cdot \mathcal{O}_R(y) \\
&= \sum_k \frac{(i\lambda)^k}{k!} \Big(\int_{\hat{\Sigma}} \delta(x-y) R[T] \Big)^k \cdot \mathcal{O}_R(y) \\
&= \sum_k \frac{(i\lambda R[T])^k}{k!} \cdot \mathbb{1} \cdot \mathcal{O}_R(y) \\
&= e^{i\lambda R[T]} \cdot \mathcal{O}_R(y) \\
&= R[g] \cdot \mathcal{O}_R(y)
\end{aligned}$$

4.7 Exemple : Symétrie 0-forme $U(1)$

On considère $G = U(1)$ et $g = e^{i\alpha} \in G$. Alors $U_g(\Sigma_{d-1}) = \exp\Big\{ i\alpha \int_{\Sigma_{d-1}} \star j_1 \Big\}$. On considère également un opérateur local $\mathcal{O}_R(y)$ chargé sous $G = U(1)$, de charge q, et on appelle $\hat{\Sigma}_d$ le volume dont le bord est $\partial\hat{\Sigma}_d = \Sigma_{d-1}$. L'identité de Ward donne

$$\partial_\mu j^\mu(x) \mathcal{O}_R(y) = \delta(x-y) q \mathcal{O}_R(y)$$

L'action du SDO sur l'opérateur est la suivante :

$$\begin{aligned}
U_g(\Sigma_{d-1})\mathcal{O}_R(y) &= \exp\Big\{ i\alpha \int_{\partial\hat{\Sigma}_d} \star j_1 \Big\} \mathcal{O}_R(y) \\
&= \exp\Big\{ i\alpha \int_{\hat{\Sigma}_d} d \star j_1 \Big\} \mathcal{O}_R(y) \\
&= \exp\Big\{ i\alpha \int_{\hat{\Sigma}_d} q\delta(x \in \partial\hat{\Sigma}) \Big\} \mathcal{O}_R(y) \\
&= e^{iq\alpha} \mathcal{O}_R(y)
\end{aligned}$$

Troisième partie

Symétries généralisées

Dans cette troisième partie, nous allons aborder le concept de symétrie généralisée. L'existence de courants conservés complètement antisymétriques $J^{[\mu_1 \cdots \mu_n]}$ permet, en intégrant ces courants sur des surfaces, de construire des charges étendues. Ces charges possèdent alors des propriétés topologiques. Cette section se base sur les articles [6] et [8].

5 Propriétés générales

Le passage aux symétries généralisées se fait en augmentant la dimension des objets sur lesquels agissent les opérateurs.

Définition 5.1 (Codimension). La codimension $\bar{d}$ d'un objet de dimension p dans un espace d-dimensionnel est défini comme

$$\bar{d} \mathrel{\widehat{=}} d - p \tag{5.1}$$

Définition 5.2. Une symétrie p-forme est un opérateur U de codimension $p+1$ qui est topologique et inversible.

Cet opérateur peut être introduit sur des hypersurfaces de codimension $(p+1)$ Σ_{d-p-1}.

Définition 5.3. Soit $\mathcal{M}$ une variété d-dimensionnelle et Σ_{d-p-1}, Σ'_{d-p-1} deux surfaces incluses dans $\mathcal{M}$.
Σ_{d-p-1} et Σ'_{d-p-1} sont dite homotopes s'il existe une application $H \in C^0([0,1]^{d-p-1} \times [0,1], \mathcal{M})$ telle que $\forall (s,t) \in [0,1]^{d-p-1} \times [0,1]$,

1. $H(s,0) = \Sigma_{d-p-1}(s)$
2. $H(s,1) = \Sigma'_{d-p-1}(s)$

Propriété 5.1. *U est un opérateur topologique, c'est à dire que*

$$U(\Sigma_{d-p-1}) = U(\Sigma'_{d-p-1}) \tag{5.2}$$

lorsque Σ_{d-p-1} est homotope à Σ'_{d-p-1}

Propriété 5.2. *U est un opérateur inversible dans le sens où on peut toujours trouver un autre opérateur topologique de codimension $(p+1)$ V tel que*

$$U(\Sigma_{d-p-1}) \cdot V(\Sigma_{d-p-1}) = \mathbb{1} \tag{5.3}$$

On note alors $V = U^{-1}$

Les symétries p-forme forment un groupe $G^{(p)}$. Les opérateurs U sont paramétrisés par les éléments de ce groupe : U_g, $g \in G^{(p)}$.

Propriété 5.3 (Fusion rule). *La loi de multiplication du groupe G induit la composition suivante des opérateurs :*

$$\forall g_a, g_b \in G^{(p)}, \quad U_{g_a}(\Sigma_{d-p-1})U_{g_b}(\Sigma_{d-p-1}) = U_{g_a g_b}(\Sigma_{d-p-1}) \tag{5.4}$$

Enfin, notons que le groupe $G^{(p)}$ est abélien, puisque les opérateurs U sont topologiques de codimension strictement supérieure 1.
En effet, dans ce cas, il existe un chemin permettant d'inverser l'ordre des opérateurs sans que ceux-ci ne s'intersectent.

6 1-form Global Symmetry

Considérons un premier exemple de symétrie généralisée : les symétries globales 1-forme. Ce sont des symétries agissant sur des opérateurs de dimension 1 (*line operator*). Par simplicité, on considère le groupe $G^{(1)}$ paramétrisant ces symétries comme abélien et continu, et donc $G^{(1)} \cong U(1)^N$. On fixe alors $G^{(1)} = U(1)$.

Définition 6.1. On associe une 2-forme de courant $j_2 \mathrel{\widehat{=}} j_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$ co-fermée à la symétrie globale 1-forme :

$$d \star j_2 = 0 \tag{6.1}$$

En terme de composantes, $d \star j_2(x) = 0 \implies \partial_\mu j^{[\mu\nu]}(x) = 0$.
On peut alors coupler le courant j_2 avec un background gauge field :

$$S \mapsto S + i \int B_2 \wedge \star j_2 \tag{6.2}$$

L'action sera alors invariante sous une transformation de gauge $B_2 \mapsto B_2 + d\Lambda_1$ par co-fermeture de j_2 :

$$\delta_\Lambda S = i \int d\Lambda_1 \wedge \star j_2 = i(-1)^2 \int \Lambda_1 \wedge d \star j_2 = 0$$

Définition 6.2. Soit $g = e^{i\lambda} \in G^{(1)}$ avec $\lambda \in S^1$. On définit alors le SDO selon

$$U_g(\Sigma_{d-2}) \mathrel{\widehat{=}} \exp\left\{ i\lambda \oint_{\Sigma_{d-2}} \star j_2 \right\} \tag{6.3}$$

Introduisons à présent un concept important : l'*enlacement*, ou *linking number*.[2]

Définition 6.3. Soit M une variété de dimension d compact, orientée et sans bord ($\partial M = \varnothing$). Considérons deux sous-variétés de M homotopes à un point : $U_q \subset M$ de dimension q et $V_r \subset M$ de dimension r, telles que $q + r = d - 1$. On suppose de plus que $U_q \cap V_r = \varnothing$.
On peut alors introduire la sous-variété de dimension $r + 1$ $W_{r+1} \subset M$ telle que $\partial W_{r+1} = V_r$.
On note $\{p_i\} = U_q \cap W_{r+1}$ l'ensemble des points où U_q et W_{r+1} s'intersectent.
Puisque $q + (r + 1) = d$, l'espace tangent à chaque $p_i \in M$ génère l'espace tangent de M tout entier :

$$T_{p_i} M = T_{p_i} U_q \oplus T_{p_i} W_{r+1} \tag{6.4}$$

Ainsi, il y une orientation définie à chaque p_i, induite par l'orientation de U_q et V_r. On peut alors définir

$$\mathrm{sign}(p_i) = \begin{cases} +1, & \text{si l'orientation induite par } U_q \text{ et } V_r \text{ est } \textit{identique} \text{ à celle de } M \\ -1, & \text{si l'orientation induite par } U_q \text{ et } V_r \text{ est } \textit{opposée} \text{ à celle de } M \end{cases} \tag{6.5}$$

L'*enlacement* (ou ***linking number***) de U_q et $V_{r=d-q-1}$ est donné par

$$\mathrm{Link}(U_q, V_{d-q-1}) \,\widehat{=}\, \sum_i \mathrm{sign}(p_i) \tag{6.6}$$

7 Symétries généralisées dans la théorie de Maxwell

7.1 Symétries électrique et magnétique

Considérons à nouveau l'action 2.15 : une théorie de jauge en d-dimension, sans matière, de groupe de jauge $U(1)$. Soit A et 1-forme et $F = dA$,

$$S = \frac{1}{2} \int F \wedge \star F = -\frac{1}{4} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{7.1}$$

Équations du mouvement

Les équations du mouvement sont $d \star F = 0$. On peut alors interpréter F comme une 2-forme de courant conservée : $F = j_2^e$ avec $d \star j_2^e = 0$. De même, on en déduit l'existence d'une 1-forme symétrie $G^{(1)} = U(1)$ associée aux SDOs :

$$U_g^{(e)}(\Sigma_{d-2}) = \exp\left\{ i\alpha \int_{\Sigma_{d-2}} \star j_2^e \right\} = \exp\left\{ i\alpha \int_{\Sigma_{d-2}} \star F \right\}, \quad g = e^{i\alpha} \in U(1) \tag{7.2}$$

Remarque. Puisque $\int_{\Sigma_{d-2}} \star F$ compte le nombre de charges contenues dans Σ_2, ceci est cohérent avec le choix de symétrie $U(1)$ pour obtenir $\int_{\Sigma_{d-2}} \star F \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, pour obtenir des charges entières, il faut que le groupe de symétrie soit $U(1)$ pour avoir $e^{i\alpha} = e^{i(\alpha+2\pi)}$.

Identités de Bianchi

Les identités de Bianchi sont $dF = 0$. On peut alors interpréter F comme une 2-forme de courant conservée : $(-1)^{2(d-2)} \frac{F}{2\pi} = j_{d-2}^m$ avec $d \star j_{d-2}^m = 0$. On en déduit l'existence d'une symétrie $(d-3)$-forme $G^{(d-3)} = U(1)$ associée aux SDOs :

$$U_g^{(m)}(\Sigma_2) = \exp\left\{ i\alpha \int_{\Sigma_2} \star j_{d-2}^m \right\} = \exp\left\{ i \frac{\alpha}{2\pi} \int_{\Sigma_2} F \right\}, \quad g = e^{i\alpha} \in U(1) \tag{7.3}$$

2. Cette définition est tirée de [6]

Remarque. L'intégrale $\int_{\Sigma_2} F$ mesure le flux magnétique à travers la surface Σ_2

Définition 7.1. On appelle $U_g^{(e)}$ la symétrie 1-forme *électrique* et $U_g^{(m)}$ la symétrie $(d-3)$-forme *magnétique*

7.2 Wilson line

Considérons dans un premier temps la symétrie électrique. L'opérateur de symétrie 1-forme agit sur un objet chargé 1-dimensionnel.

Définition 7.2. Soit L un chemin orienté. Les opérateurs chargés sous la symétrie électrique sont des lignes de Wilson, construites selon

$$\mathcal{W}_q(L) = \exp\left\{iq\int_L A\right\}, \quad q \in \mathbb{Z} \tag{7.4}$$

Propriété 7.1. *Leur charge est obtenue en appliquant un SDO*

$$\langle U_g^{(e)}(\Sigma_{d-2})\mathcal{W}_q(L)\rangle = e^{i\alpha q Link(\Sigma_{d-2},L)}\langle \mathcal{W}_q(L)U_g^{(e)}(\Sigma'_{d-2})\rangle \tag{7.5}$$

où Σ'_{d-2} est homotope à Σ_{d-2} et telle que $Link(\Sigma'_{d-2}, L) = 0$.

Preuve. En présence d'une ligne de Wilson, les identités de Ward-Takahash montrent que les équations du mouvement sont modifiées selon

$$\langle (d\star F)\mathcal{W}_q(L)\rangle = q\,\delta^{d-1}(L)\langle \mathcal{W}_q(L)\rangle \tag{7.6}$$

En intégrant la $(d-2+1)$-forme $d\star F$, on trouve

$$\int_{\Sigma_{d-1}} d\star F = \oint_{\partial(\Sigma_{d-1})} \star F = \int_{\Sigma_{d-1}} q\,\delta^{d-1}(L) = q\mathrm{Link}(\Sigma_{d-2}, L) \tag{7.7}$$

En exponantiant, on retrouve la propriété 7.5. □

7.3 Opérateur de 't Hooft

Considérons à présent la symétrie magnétique. L'opérateur de symétrie $(d-3)$-forme agit sur un objet chargé $(d-3)$-dimensionnel.

Définition 7.3. On définit le photon dual $\tilde{A}$ par

$$dA = \star d\tilde{A} \tag{7.8}$$

Le photon dual est bien une $(d-3)$-forme.

Définition 7.4. Soit Σ_{d-3} une surface orientée. Les opérateurs chargés sous la symétrie magnétique sont des opérateurs de 't Hooft, construits selon

$$\mathcal{H}_q(\Sigma_{d-3}) = \exp\left\{iq\int_{\Sigma_{d-3}} \tilde{A}\right\} \tag{7.9}$$

Propriété 7.2. Leur charge est obtenue en appliquant un SDO

$$\langle U_g^{(m)}(\Sigma_2)\mathcal{H}_q(\Sigma_{d-3})\rangle = e^{iqLink(\Sigma_2,\Sigma_{d-3})}\langle \mathcal{H}_q(\Sigma_{d-3})U_g^{(m)}(\Sigma_2')\rangle \tag{7.10}$$

où Σ'_{d-3} est homotope à Σ_{d-3} et telle que $Link(\Sigma'_{d-3},\Sigma_2) = 0$.

Preuve. En présence d'un opérateur de 't Hooft, les identités de Ward-Takahash montrent que les identités de Bianchi sont modifiées selon

$$(dF)\mathcal{H}_q(\Sigma_{d-3}) = q\,\delta^3(\Sigma_{d-3})\mathcal{H}_q(\Sigma_{d-3}) \tag{7.11}$$

En terme du champ dual, on a $F = dA = (-1)^{2(d-2)} \star\star dA = (-1)^{2(d-2)} \star \tilde{F} = \star\tilde{F}$. Ainsi, on a

$$(d\star\tilde{F})\mathcal{H}_q(\Sigma_{d-3}) = q\,\delta^3(\Sigma_{d-3})\mathcal{H}_q(\Sigma_{d-3}) \tag{7.12}$$

En intégrant sur la 3-forme puis en exponentiant, on trouve le résultat attendu. □

8 Groupe et invariance de jauge

8.1 Invariance de jauge et ligne de Wilson

Intéressons nous à l'invariance de jauge de la ligne de Wilson.

groupe $U(1)$

Sous une transformation de jauge $A \mapsto A + d\lambda$ associée au groupe $U(1)$, on a une identification du paramètre $\lambda \mapsto \lambda + 2\pi$. Ainsi,

$$\int_L d\lambda = \int_{\partial L} \lambda \in 2\pi\mathbb{Z} \tag{8.1}$$

Sous une telle transformation, la ligne de Wilson s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_q(L) &= \exp\left\{iq\int_L (A + d\lambda)\right\} \\ &= \exp\left\{iq\int_L d\lambda\right\}\mathcal{W}_q(L) \end{aligned}$$

L'invariance de jauge impose

$$\exp\left\{iq\int_L d\lambda\right\} = 1 \iff q\int_L d\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}$$

On trouve alors la restriction suivante sur la charge :

$$q \in \mathbb{Z} \tag{8.2}$$

Munis des conditions 8.1 et 8.2, on constate que l'opérateur $U_g^{(e)}$ est une représentation T de $U(1)$. En effet, on a bien que $U_g^{(e)}$ est de la forme $U_g^{(e)} = T(\alpha) = e^{i\alpha n}$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Pour $\alpha = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, on a $T(2\pi m) = T(1)^m = 1$.

groupe $\mathbb{R}$

Si le groupe de jauge est $\mathbb{R}$, il n'y a plus de périodicité du paramètre de jauge et

$$\int_L d\lambda = 0 \tag{8.3}$$

Dans ce cas, la condition $q\int_L d\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}$ ne permet pas de mettre de contrainte sur la charge et on a

$$q \in \mathbb{R} \tag{8.4}$$

Munis des conditions 8.3 et 8.4, on trouve que l'opérateur $U_g^{(e)}$ est une représentation du groupe $\mathbb{R}$. En effet, son action revient à multiplier par des phases $e^{i\alpha q}$, $q \in \mathbb{R}$. On ne peut donc plus trouver de valeur α telle que $T(\alpha) = 1\,\forall q$.

8.2 Invariance de jauge et ligne de 't Hooft

Intéressons nous à l'invariance de jauge des ligne de 't Hooft. Pour ce faire, commençons par rappeler que les symétries agissant dessus dépendent de $\int_{\Sigma_2} F$ avec $\partial\Sigma_2 = 0$. Ainsi, par le théorème de Stockes, $\int_{\Sigma_2} dA = \int_{\partial\Sigma_2} A = 0$ si $F = dA$ globalement.

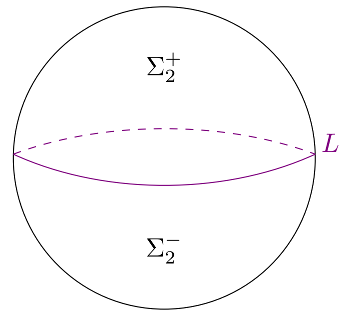
Séparons alors Σ_2 en deux surfaces Σ_2^+ et Σ_2^- telles que

$$\Sigma_2^+ \cup \Sigma_2^- = \Sigma_2$$

et on appelle

$$L \equiv \partial\Sigma_2^+$$

(bien sur $\partial\Sigma_2^+ = \partial\Sigma_2^-$).



Dans ce cas, $F = dA$ n'est plus définit globalement sur Σ_2, mais séparément sur Σ_2^+ et Σ_2^-, où le degré de liberté entre ces deux définition est une transformation de jauge

$$A\Big|_{\Sigma_2^+} = A\Big|_{\Sigma_2^-} + d\lambda \tag{8.5}$$

Ainsi, on voit que

$$\int_{\Sigma_2} F = \int_{\Sigma_2^+\cup\Sigma_2^-} F \tag{8.6}$$

$$= \int_{\Sigma_2^+} F + \int_{\Sigma_2^-} F \tag{8.7}$$

$$= \int_L d\lambda \tag{8.8}$$

groupe $U(1)$

Dans le cas du groupe de jauge $U(1)$, l'intégrale 8.8 donne $\int_L d\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}$.
Remarquons que dans ce cas, on retrouve bien que $U_g^{(m)}(\Sigma_2) = \exp\left\{i\alpha\int_{\Sigma_2}\frac{F}{2\pi}\right\}$ est de la forme $e^{i\alpha n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Par des arguments analogues au point précédent, on déduit que le groupe de symétrie 1-forme magnétique est $U(1)$.

groupe $\mathbb{R}$

Dans le cas du groupe de gauge $\mathbb{R}$, l'intégrale 8.8 est toujours nulle. Aucun objet n'est donc chargé sous $U_g^{(m)}$: ce n'est pas une symétrie de la théorie.

9 Conclusion

Dans ce stage, nous avons étudié la théorie de Maxwell sous l'angle des symétries généralisées. Ceci nous a permis de mettre en évidence les symétries 1-forme électrique et $(d-3)$-forme magnétique. Ensuite, nous avons regardé les objets sur lesquels agissent ces symétries, et l'influence du groupe de jauge sur la quantification de la charge et sur l'existence de symétrie dans la théorie, dans le cas particulier des groupes $U(1)$ et $\mathbb{R}$.
Nous avons trouvé que les charges électriques et magnétiques dans le groupe de jauge $U(1)$ sont quantifiées et bien définies, tandis que dans le groupe de jauge $\mathbb{R}$, seules les charges électriques existent sans quantification, et les charges magnétiques ne sont pas présentes.
De plus, les opérateurs $U_g^{(e)}$ et $U_g^{(m)}$ sont des représentations de $U(1)$ dans le cas du groupe de jauge $U(1)$, et $U_g^{(e)}$ est une représentation du groupe $\mathbb{R}$ dans le cas du groupe de jauge $\mathbb{R}$, alors que $U_g^{(m)}$ est une représentation triviale.

Références

[1] Antonio Gramsci. *Quaderni del carcere*. Number 164 in Nuova Universale Einaudi. Einaudi, Torino, 2. ed. edition, 1977. Edizione critica dell'Istituto Gramsci a cura di Valentino Gerratana.

[2] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. 2003.

[3] G.W. Gibbons. Part iii : Applications of differential geometry to physics. 01 2006.

[4] M. Henneaux and C. Teitelboim. P FORM ELECTRODYNAMICS. *Found. Phys.*, 16 :593–617, 1986.

[5] Vincent Bouchard. Math 215 : Calculus iv, 2023. https://sites.ualberta.ca/~vbouchar/MATH215/section_hodge.html.

[6] T. Daniel Brennan and Sungwoo Hong. Introduction to generalized global symmetries in qft and particle physics, 2023.

[7] Pedro R. S. Gomes. An introduction to higher-form symmetries. *SciPost Physics Lecture Notes*, September 2023. http://dx.doi.org/10.21468/SciPostPhysLectNotes.74.

[8] Lakshya Bhardwaj, Lea E. Bottini, Ludovic Fraser-Taliente, Liam Gladden, Dewi S. W. Gould, Arthur Platschorre, and Hannah Tillim. Lectures on generalized symmetries, 2023.