Le formalisme Post-Newtonien et ses régularisations

Antoine Dierckx
Gravitational Waves - PHYS-F484

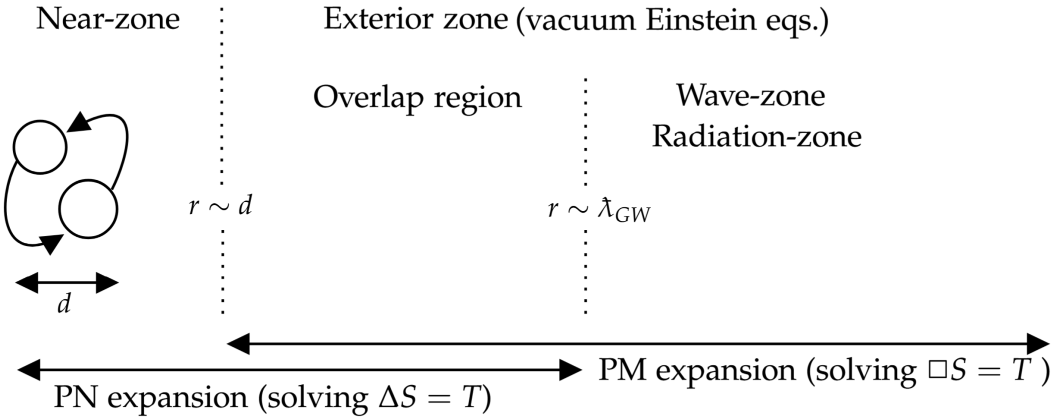
10 juin 2025

Contents

Motivation & échelles

Motivation & échelles

$$\lambda_{\mathsf{GW}} \sim \frac{c}{\omega_{\mathsf{GW}}} \sim \frac{c}{\omega_s} \sim \frac{c}{v} d \sim \frac{1}{\beta} d \tag{1}$$



Relativité Générale

Choix de l'action et de la jauge

- Action d'Einstein-Hilbert $S_{\mathrm{EH}}[g, \partial g, \partial^2 g]$

Choix de l'action et de la jauge

- Action d'Einstein-Hilbert $S_{\mathrm{EH}}[g, \partial g, \partial^2 g]$
- Action de Landau-Lifshitz $S_{\mathrm{LL}}[g, \partial g]$

Choix de l'action et de la jauge

- Action d'Einstein-Hilbert $S_{\mathrm{EH}}[g, \partial g, \partial^2 g]$
- Action de Landau-Lifshitz $S_{\mathrm{LL}}[g, \partial g]$
- Métrique densifiée $G^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$

$$S_{\mathrm{LL}}[g, \partial g] \to S_{\mathrm{LL}}[G, \partial G]$$

Choix de l'action et de la jauge

- Action d'Einstein-Hilbert $S_{\text{EH}}[g, \partial g, \partial^2 g]$
- Action de Landau-Lifshitz $S_{\text{LL}}[g, \partial g]$
- Métrique densifiée $G^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$

$$S_{\text{LL}}[g, \partial g] \to S_{\text{LL}}[G, \partial G]$$

- Choix de la jauge harmonique

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0 \tag{2}$$

Choix de l'action et de la jauge

- Action d'Einstein-Hilbert $S_{\mathrm{EH}}[g, \partial g, \partial^2 g]$
- Action de Landau-Lifshitz $S_{\mathrm{LL}}[g, \partial g]$
- Métrique densifiée $G^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$

$$S_{\mathrm{LL}}[g, \partial g] \to S_{\mathrm{LL}}[G, \partial G]$$

- Choix de la jauge harmonique

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0 \tag{2}$$

$\implies$ ajout d'un terme à l'action identiquement nul : $\int (\partial \cdot G)^2 = 0$

Fixation de jauge *à la* Fadeev-Popov

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[G] \, \exp\left(i \frac{c^3}{16\pi G_\mathcal{N}} S[G] \right) \tag{3}$$

(6)

Fixation de jauge *à la* Fadeev-Popov

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[G] \, \exp\left(i \frac{c^3}{16\pi G_{\mathcal{N}}} S[G]\right) \tag{3}$$

$$\delta[\partial_\mu G^{\mu\nu}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}[B] \, \exp\left(i \frac{c^3}{16\pi G_{\mathcal{N}}} \int \mathrm{d}^4 x \, B_\nu \partial_\mu G^{\mu\nu}\right) \tag{4}$$

(6)

Fixation de jauge *à la* Fadeev-Popov

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[G] \, \exp\left(i \frac{c^3}{16\pi G_{\mathcal{N}}} S[G] \right) \tag{3}$$

$$\delta[\partial_\mu G^{\mu\nu}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}[B] \, \exp\left(i \frac{c^3}{16\pi G_{\mathcal{N}}} \int \mathrm{d}^4x \, B_\nu \partial_\mu G^{\mu\nu} \right) \tag{4}$$

$$= \mathcal{N}' \int \mathcal{D}[B] \, \exp\left(i \frac{c^3}{16\pi G_{\mathcal{N}}} \int \mathrm{d}^4x \, \left\{ B_\nu \partial_\mu G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} B_\nu B^\nu \right\} \right) \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Fixation de jauge *à la* Fadeev-Popov

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[G] \, \exp\left(i \frac{c^3}{16\pi G_\mathcal{N}} S[G] \right) \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\delta[\partial_\mu G^{\mu\nu}] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}[B] \, \exp\left(i \frac{c^3}{16\pi G_\mathcal{N}} \int \mathrm{d}^4x \, B_\nu \partial_\mu G^{\mu\nu} \right) && (4) \\
&= \mathcal{N}' \int \mathcal{D}[B] \, \exp\left(i \frac{c^3}{16\pi G_\mathcal{N}} \int \mathrm{d}^4x \, \left\{ B_\nu \partial_\mu G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} B_\nu B^\nu \right\} \right) && (5) \\
&= \mathcal{N}'' \int \mathcal{D}[\tilde{B}] \, \exp\left(i \frac{c^3}{16\pi G_\mathcal{N}} \int \mathrm{d}^4x \, \frac{1}{2} \partial_\alpha G^{\alpha\nu} \partial_\beta G^\beta{}_\nu \right) && (6)
\end{aligned}$$

Équations d'Einstein

$$S = S_{\mathrm{LL}} \tag{7}$$

$$= \frac{c^3}{32\pi G_{\mathcal{N}}} \int \mathrm{d}^4 x \left\{ -\frac{1}{2} \left(G_{\mu\rho} G_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma} \right) G^{\lambda\tau} \partial_\lambda G^{\mu\nu} \partial_\tau G^{\rho\sigma} \right.$$
$$\left. + G_{\mu\nu} \left(\partial_\rho G^{\mu\sigma} \partial_\sigma G^{\nu\rho} \qquad\qquad\qquad\qquad \right) \right\} \tag{8}$$

Équations d'Einstein

$$
\begin{aligned}
S &= S_{\mathrm{LL}} + S_{\mathrm{g.f.}} && (7) \\
&= \frac{c^3}{32\pi G_{\mathcal{N}}} \int \mathrm{d}^4 x \left\{ -\frac{1}{2} \left(G_{\mu\rho} G_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma} \right) G^{\lambda\tau} \partial_\lambda G^{\mu\nu} \partial_\tau G^{\rho\sigma} \right. \\
&\qquad \left. + G_{\mu\nu} \left(\partial_\rho G^{\mu\sigma} \partial_\sigma G^{\nu\rho} - \partial_\rho G^{\mu\rho} \partial_\sigma G^{\nu\sigma} \right) \right\} && (8)
\end{aligned}
$$

Équations d'Einstein

$$
\begin{aligned}
S &= S_{\mathrm{LL}} + S_{\mathrm{g.f.}} + S_{\text{matière}} && (7)\\
&= \frac{c^3}{32\pi G_{\mathcal{N}}} \int \mathrm{d}^4x \bigg\{ -\frac{1}{2}\left(G_{\mu\rho}G_{\nu\sigma} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right) G^{\lambda\tau}\partial_\lambda G^{\mu\nu}\partial_\tau G^{\rho\sigma} \\
&\qquad + G_{\mu\nu}\left(\partial_\rho G^{\mu\sigma}\partial_\sigma G^{\nu\rho} - \partial_\rho G^{\mu\rho}\partial_\sigma G^{\nu\sigma}\right)\bigg\} + S_{\text{matière}} && (8)
\end{aligned}
$$

Équations d'Einstein linéarisées

$$\begin{cases} \Box G^{\mu\nu} \equiv G^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma G^{\mu\nu} = \dfrac{16\pi G_{\mathcal{N}}}{c^4}|g|T^{\mu\nu} + \Sigma^{\mu\nu}[G, \partial G] & \text{EOM} \quad (9a) \\ \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 & \text{Bianchi} \quad (9b) \end{cases}$$

$$\partial^2 h^{\mu\nu} = \frac{16\pi G_{\mathcal{N}}}{c^4} T^{\mu\nu} + \Lambda^{\mu\nu} \tag{10}$$

avec $\partial^2 \equiv \eta \cdot \partial \cdot \partial$ et $\Lambda^{\mu\nu} = \Sigma^{\mu\nu} - h^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma h^{\mu\nu} \sim \mathcal{O}(h^2)$

Expansion post-newtonienne

Expansion post-newtonienne

- Expansion en $\beta = v/c$

$$\overline{h}^{\mu\nu} \equiv h^{\mu\nu}\big|_{\text{interior}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\beta^{-n}} \overline{h}^{\mu\nu}_{(n)} \tag{11}$$

$$\overline{\tau}^{\mu\nu} \equiv \left(\frac{16\pi G_{\mathcal{N}}}{c^4} T^{\mu\nu} + \Lambda^{\mu\nu} \right)\Bigg|_{\text{interior}} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{\beta^{-n}} \overline{\tau}^{\mu\nu}_{(n)} \tag{12}$$

Expansion post-newtonienne

- Expansion en $\beta = v/c$

$$\overline{h}^{\mu\nu} \equiv h^{\mu\nu}\big|_{\text{interior}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\beta^{-n}} \overline{h}^{\mu\nu}_{(n)} \tag{11}$$

$$\overline{\tau}^{\mu\nu} \equiv \left(\frac{16\pi G_N}{c^4} T^{\mu\nu} + \Lambda^{\mu\nu} \right)\Bigg|_{\text{interior}} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{\beta^{-n}} \overline{\tau}^{\mu\nu}_{(n)} \tag{12}$$

- Ordre de l'expansion

$$n\text{PN} = \mathcal{O}\left(\beta^{2n}\right) \tag{13}$$

Expansion post-newtonienne

- Expansion en $\beta = v/c$

$$\overline{h}^{\mu\nu} \equiv h^{\mu\nu}\big|_{\text{interior}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\beta^{-n}} \overline{h}^{\mu\nu}_{(n)} \tag{11}$$

$$\overline{\tau}^{\mu\nu} \equiv \left(\frac{16\pi G_{\mathcal{N}}}{c^4} T^{\mu\nu} + \Lambda^{\mu\nu} \right)\Bigg|_{\text{interior}} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{\beta^{-n}} \overline{\tau}^{\mu\nu}_{(n)} \tag{12}$$

- Ordre de l'expansion

$$n\text{PN} = \mathcal{O}\left(\beta^{2n}\right) \tag{13}$$

- Résolution itérative

$$\begin{cases} \Delta \overline{h}^{\mu\nu}_{(n)} = 16\pi G_{\mathcal{N}} \overline{\tau}^{\mu\nu}_{(n-4)} \left[\overline{h}_{(1)}, \ldots, \overline{h}_{(n-5)} \right] + \partial_t^2 \overline{h}^{\mu\nu}_{(n-2)} \left[\overline{h}_{(1)}, \ldots, \overline{h}_{(n-3)} \right] & \text{(14a)} \\ \partial_\mu \overline{h}^{\mu\nu}_{(n)} = 0 & \text{(14b)} \end{cases}$$

Ordre 0PN

- Tenseur d'énergie-impulsion

$$\begin{cases} T^{00} \sim \rho\, c^2 \sim \mathcal{O}(c^2) & (15a) \\ T^{0i} \sim \rho\, c v^i \sim \mathcal{O}(c) & (15b) \\ T^{ij} \sim \rho\, v^i v^j \sim \mathcal{O}(1) & (15c) \end{cases}$$

Ordre 0PN

- Tenseur d'énergie-impulsion

$$\begin{cases} T^{00} \sim \rho\, c^2 \sim \mathcal{O}(c^2) & (15a) \\ T^{0i} \sim \rho\, c v^i \sim \mathcal{O}(c) & (15b) \\ T^{ij} \sim \rho\, v^i v^j \sim \mathcal{O}(1) & (15c) \end{cases}$$

- Equation poissonienne

$$\Delta \overline{h}^{00} = \frac{16\pi G_{\mathcal{N}}}{c^2}\rho \tag{16}$$

Ordre 0PN

- Tenseur d'énergie-impulsion

$$\begin{cases} T^{00} \sim \rho\, c^2 \sim \mathcal{O}(c^2) & (15a) \\ T^{0i} \sim \rho\, c v^i \sim \mathcal{O}(c) & (15b) \\ T^{ij} \sim \rho\, v^i v^j \sim \mathcal{O}(1) & (15c) \end{cases}$$

- Equation poissonienne

$$\Delta \overline{h}^{00} = \frac{16\pi G_{\mathcal{N}}}{c^2}\rho \tag{16}$$

- Equivalence avec le potentiel newtonien

$$\overline{h}^{00}(t,\vec{x}) = -\frac{4}{c^2}U(t,\vec{x}) \tag{17}$$

Sources compactes binaires

Sources compactes binaires

- Modèle de masse ponctuelle

$$\rho(t,\vec{x})/c^2 = m_1\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_1(t)) + m_2\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_2(t)) \tag{18}$$

Sources compactes binaires

- Modèle de masse ponctuelle

$$\rho(t,\vec{x})/c^2 = m_1\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_1(t)) + m_2\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_2(t)) \tag{18}$$

- Fonction de Green $\Delta G = \delta$

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} \tag{19}$$

Sources compactes binaires

- Modèle de masse ponctuelle

$$\rho(t,\vec{x})/c^2 = m_1\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_1(t)) + m_2\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_2(t)) \tag{18}$$

- Fonction de Green $\Delta G = \delta$

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} \tag{19}$$

- Solution newtonienne

$$U(t,\vec{x}) = \frac{G_{\mathcal{N}}m_1}{r_1} + \frac{G_{\mathcal{N}}m_2}{r_2} \tag{20}$$

$$-\vec{F}(\vec{x}) = \left(\frac{-G_{\mathcal{N}}m_1}{r_1^2}\vec{n}_1 - \frac{G_{\mathcal{N}}m_2}{r_2^2}\vec{n}_2\right) \tag{21}$$

Sources compactes binaires

- Modèle de masse ponctuelle

$$\rho(t,\vec{x})/c^2 = m_1\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_1(t)) + m_2\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_2(t)) \tag{18}$$

- Fonction de Green $\Delta G = \delta$

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} \tag{19}$$

- Solution newtonienne

$$U(t,\vec{x}) = \frac{G_{\mathcal{N}} m_1}{r_1} + \frac{G_{\mathcal{N}} m_2}{r_2} \tag{20}$$

$$-\vec{F}(\vec{x}) = \left(\frac{-G_{\mathcal{N}} m_1}{r_1^2}\vec{n}_1 - \frac{G_{\mathcal{N}} m_2}{r_2^2}\vec{n}_2\right) \tag{21}$$

$$\vec{F}(\vec{z}_A) = \infty\,?$$

Divergences et besoin de régularisation

- Dès l'ordre le plus bas, nécessité de régulariser les divergences $\vec{F}_A(\vec{z}_A)$
- Fonctions bien définies partout sauf en $\vec{z}_A$

$$F(\vec{x}) \underset{\lim \vec{x}\to\vec{z}_A}{=} \sum_{p_0\leq p\leq P} {r_A}^p {f^A}_p(\vec{n}_A) + \mathcal{O}\left(r_A^P\right) \qquad \forall P\in\mathbb{N}, \forall A\in\{1,2\} \tag{22}$$

- Solution d'équation de Poisson (intégrale poissonienne aux ordres supérieurs)
- Deux approches principales :
  - Régularisation de **Hadamard** pour les ordres les plus bas
  - Régularisation **dimensionnelle** pour tout les ordres

Régularisation de Hadamard

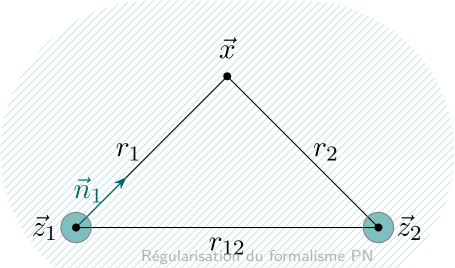
Régularisation de Hadamard - partie finie de F

Definition (Partie finie de F)

La **partie finie** de Hadamard de $F(\vec{x})$ à z_A est définie comme suit

$$\langle F \rangle_A \equiv \int \frac{\mathrm{d}\Omega_A}{4\pi} {f^A}_0(\vec{n}_A) \tag{23}$$

Moyenne de ${f^A}_0(\vec{n}_A)$ sur l'angle solide $\mathrm{d}\Omega_A = \sin(\theta_A)\mathrm{d}\theta_A\mathrm{d}\phi_A$ autour de la direction d'approche $\vec{n}_A$.



Régularisation de Hadamard - partie finie de F

Exemple :

$$F(\vec{x}) = \frac{1}{r_1} + \vec{a} \cdot \vec{n}_1 \text{ and } G(\vec{x}) = \frac{1}{r_1} + \vec{b} \cdot \vec{n}_1 \tag{24}$$

Régularisation de Hadamard - partie finie de F

Exemple :

$$F(\vec{x}) = \frac{1}{r_1} + \vec{a} \cdot \vec{n}_1 \text{ and } G(\vec{x}) = \frac{1}{r_1} + \vec{b} \cdot \vec{n}_1 \tag{24}$$

$$F \sim \sum {r_1}^p {f^1}_p \text{ and } G \sim \sum {r_1}^p {g^1}_p \tag{25}$$

we identify ${f^1}_{-1} = {g^1}_{-1} = 1$, ${f^1}_0 = \vec{a} \cdot \vec{n}_1$ and ${g^1}_0 = \vec{b} \cdot \vec{n}_1$. Since $\langle \vec{n}_1 \rangle_1 = 0$, we have $\langle F \rangle_1 = \langle G \rangle_1 = 0$

Régularisation de Hadamard - partie finie de F

Exemple :

$$F(\vec{x}) = \frac{1}{r_1} + \vec{a} \cdot \vec{n}_1 \text{ and } G(\vec{x}) = \frac{1}{r_1} + \vec{b} \cdot \vec{n}_1 \tag{24}$$

$$F \sim \sum {r_1}^p {f^1}_p \text{ and } G \sim \sum {r_1}^p {g^1}_p \tag{25}$$

we identify ${f^1}_{-1} = {g^1}_{-1} = 1$, ${f^1}_0 = \vec{a} \cdot \vec{n}_1$ and ${g^1}_0 = \vec{b} \cdot \vec{n}_1$. Since $\langle \vec{n}_1 \rangle_1 = 0$, we have $\langle F \rangle_1 = \langle G \rangle_1 = 0$, but

$$\langle FG \rangle_1 = a_i b_j \langle {n_1}^i {n_1}^j \rangle_1 = \frac{1}{3} \vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0 = \langle F \rangle_1 \langle G \rangle_1 \tag{26}$$

Régularisation de Hadamard - partie finie de F

Exemple :

$$F(\vec{x}) = \frac{1}{r_1} + \vec{a} \cdot \vec{n}_1 \text{ and } G(\vec{x}) = \frac{1}{r_1} + \vec{b} \cdot \vec{n}_1 \tag{24}$$

$$F \sim \sum {r_1}^p {f^1}_p \text{ and } G \sim \sum {r_1}^p {g^1}_p \tag{25}$$

we identify ${f^1}_{-1} = {g^1}_{-1} = 1$, ${f^1}_0 = \vec{a} \cdot \vec{n}_1$ and ${g^1}_0 = \vec{b} \cdot \vec{n}_1$. Since $\langle \vec{n}_1 \rangle_1 = 0$, we have $\langle F \rangle_1 = \langle G \rangle_1 = 0$, but

$$\langle FG \rangle_1 = a_i b_j \langle {n_1}^i {n_1}^j \rangle_1 = \frac{1}{3} \vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0 = \langle F \rangle_1 \langle G \rangle_1 \tag{26}$$

$$\langle FG \rangle_A \neq \langle F \rangle_A \langle G \rangle_A$$

Régularisation de Hadamard - Cas newtonien

- Dans le cas newtonien :

$$U(t, \vec{x}) = \frac{G_{\mathcal{N}} m_1}{r_1} + \frac{G_{\mathcal{N}} m_2}{r_2} \tag{27}$$

- Partie finie de F suffisant pour régulariser le potentiel :

$$\langle U \rangle_1 = \frac{G_{\mathcal{N}} m_2}{r_{12}} \tag{28}$$

$$\langle h^{00} \rangle_1 = -\frac{4 G_{\mathcal{N}} m_2}{c^2\, r_{12}} \tag{29}$$

Régularisation de Hadamard - Partie finie de $\int F$

- A l'ordre suivant, il faut résoudre une intégrale de Poisson :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{F(\vec{x})}{r(\vec{x},\vec{z}_A)} \mathrm{d}^3x \tag{30}$$

- Regardons le comportement de $\int F$ dans $\mathcal{B}(z_A, s)$:

$$\int_{\mathcal{B}} \mathrm{d}^3x \, r^p f_p = \int_0^s r^2 \mathrm{d}r \int \mathrm{d}\Omega \, r^p f_p \tag{31}$$

$$\tag{33}$$

Régularisation de Hadamard - Partie finie de $\int F$

- A l'ordre suivant, il faut résoudre une intégrale de Poisson :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{F(\vec{x})}{r(\vec{x},\vec{z}_A)} \mathrm{d}^3x \tag{30}$$

- Regardons le comportement de $\int F$ dans $\mathcal{B}(z_A, s)$:

$$\int_{\mathcal{B}} \mathrm{d}^3x \, r^p f_p = \int_0^s r^2 \mathrm{d}r \int \mathrm{d}\Omega \, r^p f_p \tag{31}$$

$$= 4\pi \langle f_p \rangle \int_0^s r^{p+2} \mathrm{d}r \tag{32}$$

$$\tag{33}$$

Régularisation de Hadamard - Partie finie de $\int F$

- A l'ordre suivant, il faut résoudre une intégrale de Poisson :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{F(\vec{x})}{r(\vec{x}, \vec{z}_A)} \mathrm{d}^3x \tag{30}$$

- Regardons le comportement de $\int F$ dans $\mathcal{B}(z_A, s)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{B}} \mathrm{d}^3x \, r^p f_p &= \int_0^s r^2 \mathrm{d}r \int \mathrm{d}\Omega \, r^p f_p && (31)\\
&= 4\pi \langle f_p \rangle \int_0^s r^{p+2} \mathrm{d}r && (32)\\
&= 4\pi \langle f_p \rangle \cdot \begin{cases} \frac{s^{p+3}}{p+3} & \text{if } p+2 \neq -1 \\ \ln(s) & \text{if } p+2 = -1 \end{cases} && (33)
\end{aligned}$$

Régularisation de Hadamard - Partie finie de $\int F$

Definition (Partie finie de l'intégrale de F)

La partie finie de l'intégrale de $F(\vec{x})$ sur $\mathbb{R}^3$ est définie comme suit :

$$\underset{s_1,s_2}{\mathrm{Pf}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x\, F(\vec{x}) \equiv \lim_{s\to 0} \Bigg(\int_{\mathcal{D}(s)} \mathrm{d}^3x\, F + 4\pi \ln\left(\frac{s}{s_1}\right) \langle {r_1}^3 F\rangle_1 + 4\pi \sum_{p+3<0} \frac{s^{p+3}}{p+3} \left\langle \frac{F}{{r_1}^p} \right\rangle_1 + \{1 \leftrightarrow 2\} \Bigg) \tag{34}$$

où $\mathcal{D}(s) = \mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{B}(z_1, s) \cup \mathcal{B}(z_2, s)$, s_1 et s_2 sont deux paramètres de coupure, et $\mathcal{B}(z_A, s)$ est une boule de rayon s centrée sur $\vec{z}_A$.

Régularisation de Hadamard - Partie finie de $\int F/r$

- Pour résoudre $\Delta P = F$, il faut régulariser l'intégrale de Poisson :

$$P(\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \underset{s_1,s_2}{\mathrm{Pf}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x \, \frac{F(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{35}$$

Lorsque $\vec{x}' \to \vec{z}_A$, $P(\vec{z}_A)$ diverge logarithmiquement ; il faut un contre-terme supplémentaire.

Definition (partie finie de l'intégrale de Poisson)

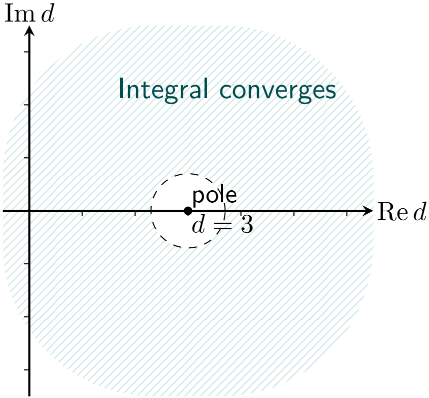
$$\underset{r_1',s_2}{\langle P \rangle_1} = -\frac{1}{4\pi} \underset{s_1,s_2}{\mathrm{Pf}} \int \mathrm{d}^3x \, \frac{F(\vec{x})}{r_1} + \left\{ \ln\left(\frac{r_1'}{s_1}\right) - 1 \right\} \left\langle r_1^2 F \right\rangle_1 \tag{36}$$

Régularisation dimensionnelle

Régularisation dimensionnelle

- Conserve l'invariance par difféomorphisme des équations d'Einstein
- Analogue aux techniques de régularisation en QFT

$$D = d + 1 \qquad d \in \mathbb{C} \qquad \epsilon = 3 - d \tag{37}$$



Equations d'Einstein en dimension d

- Même structure que les équations d'Einstein en 4 dimensions

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi G_{\mathcal{N}}^{(d)}}{c^4} T^{\mu\nu} \tag{38}$$

avec $G_{\mathcal{N}}^{(d)} = G_{\mathcal{N}} l_0^{d-3}$ et l_0^{d-3} est une longueur constante associée à la dimreg.

- Équations du mouvement en dimension D :

$$\partial^2 h^{\mu\nu} = \frac{16\pi G_{\mathcal{N}}^{(d)}}{c^4} |g| T^{\mu\nu} + \Lambda^{\mu\nu} \tag{39}$$

Fonction de Green en dimension d

- Il faut résoudre l'équation de Poisson en dimension d :

$$\Delta G^{(d)} = -4\pi\delta^{(d)} \tag{40}$$

- Solution justifiée dans les notes :

$$G^{(d)}(r) = k^{(d)} r^{2-d} \qquad \text{with } k^{(d)} = \frac{4\pi}{d-2}\frac{1}{\Omega^{(d-1)}} \tag{41}$$

Expansion et partie finie en dimension d

- Expansion de Laurent en r et $d-3$:

$$F^{(d)}(\vec{x}) \underset{\substack{\lim \vec{x}\to\vec{z}_A \\ \lim d\to 3}}{=} \sum_{\substack{p_0\leq p\leq P \\ q_0\leq q\leq Q}} r_1^{p+q\epsilon} f_{p,q}^{1(\epsilon)}(\vec{n}_1) + \mathcal{O}\left(r_1^P\right) + \mathcal{O}\left(r_1^{Q\epsilon}\right) \tag{42}$$

Expansion et partie finie en dimension d

- Expansion de Laurent en r et $d-3$:

$$F^{(d)}(\vec{x}) \underset{\substack{\lim \vec{x}\to\vec{z}_A \\ \lim d\to 3}}{=} \sum_{\substack{p_0\leq p\leq P \\ q_0\leq q\leq Q}} r_1^{p+q\epsilon} f_{p,q}^{1(\epsilon)}(\vec{n}_1) + \mathcal{O}\left(r_1^P\right) + \mathcal{O}\left(r_1^{Q\epsilon}\right) \tag{42}$$

- Partie finie de Hadamard en dimension d :

$$\left\langle f_{p,q}^{1(\epsilon)} \right\rangle_1 = \int \mathrm{d}\Omega_1^{(d-1)} f_{p,q}^{1(\epsilon)}(\vec{n}_1) \tag{43}$$

Expansion et partie finie en dimension d

- Expansion de Laurent en r et $d-3$:

$$F^{(d)}(\vec{x}) \underset{\substack{\lim \vec{x}\to\vec{z}_A \\ \lim d\to 3}}{=} \sum_{\substack{p_0\leq p\leq P \\ q_0\leq q\leq Q}} r_1^{p+q\epsilon} f_{p,q}^{1(\epsilon)}(\vec{n}_1) + \mathcal{O}\left(r_1^P\right) + \mathcal{O}\left(r_1^{Q\epsilon}\right) \tag{42}$$

- Partie finie de Hadamard en dimension d :

$$\left\langle f_{p,q}^{1(\epsilon)} \right\rangle_1 = \int \mathrm{d}\Omega_1^{(d-1)} f_{p,q}^{1(\epsilon)}(\vec{n}_1) \tag{43}$$

- Intégrale de Poisson en dimension d :

$$P^{(d)}(\vec{z}_1) = -\frac{k^{(d)}}{4\pi} \int \mathrm{d}^d x \frac{F^{(d)}(\vec{x})}{r_1^{d-2}} \tag{44}$$

Comportement de $P^{(d)}$ autour de z_1

$$P^{(d)}(z_1)\Big|_{\mathcal{B}(z_1,s)} = \frac{k^{(d)}}{4\pi}\int_{\mathcal{B}(z_1,s)} r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega^{(d-1)}\sum_{p,q} r^{p+q\epsilon} f^{1(\epsilon)}_{p,q}(\vec{n}_1) r^{2-d} \tag{45a}$$

(45d)

Comportement de $P^{(d)}$ autour de z_1

$$P^{(d)}(z_1)\Big|_{\mathcal{B}(z_1,s)} = \frac{k^{(d)}}{4\pi} \int_{\mathcal{B}(z_1,s)} r^{d-1} \mathrm{d}r \mathrm{d}\Omega^{(d-1)} \sum_{p,q} r^{p+q\epsilon} f^{1(\epsilon)}_{p,q}(\vec{n}_1) r^{2-d} \tag{45a}$$

$$= \frac{k^{(d)}}{4\pi} \sum_{p,q} \left\langle f^{1(\epsilon)}_{p,q} \right\rangle_1 \int_0^s r^{p+q\epsilon+1} \mathrm{d}r \tag{45b}$$

(45d)

Comportement de $P^{(d)}$ autour de z_1

$$P^{(d)}(z_1)\Big|_{\mathcal{B}(z_1,s)} = \frac{k^{(d)}}{4\pi}\int_{\mathcal{B}(z_1,s)} r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega^{(d-1)}\sum_{p,q} r^{p+q\epsilon} f^{1(\epsilon)}_{p,q}(\vec{n}_1) r^{2-d} \tag{45a}$$

$$= \frac{k^{(d)}}{4\pi}\sum_{p,q}\left\langle f^{1(\epsilon)}_{p,q}\right\rangle_1 \int_0^s r^{p+q\epsilon+1}\mathrm{d}r \tag{45b}$$

$$= \frac{k^{(d)}}{4\pi}\sum_{p,q}\left\langle f^{1(\epsilon)}_{p,q}\right\rangle_1 \frac{s^{p+q\epsilon+2}}{p+q\epsilon+2} \tag{45c}$$

$$\tag{45d}$$

Comportement de $P^{(d)}$ autour de z_1

$$P^{(d)}(z_1)\Big|_{\mathcal{B}(z_1,s)} = \frac{k^{(d)}}{4\pi}\int_{\mathcal{B}(z_1,s)} r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega^{(d-1)}\sum_{p,q} r^{p+q\epsilon} f^{1(\epsilon)}_{p,q}(\vec{n}_1) r^{2-d} \tag{45a}$$

$$= \frac{k^{(d)}}{4\pi}\sum_{p,q}\left\langle f^{1(\epsilon)}_{p,q}\right\rangle_1 \int_0^s r^{p+q\epsilon+1}\mathrm{d}r \tag{45b}$$

$$= \frac{k^{(d)}}{4\pi}\sum_{p,q}\left\langle f^{1(\epsilon)}_{p,q}\right\rangle_1 \frac{s^{p+q\epsilon+2}}{p+q\epsilon+2} \tag{45c}$$

$$= \frac{k^{(d)}}{4\pi}\sum_{q}\left\langle f^{1(\epsilon)}_{-2,q}\right\rangle_1 \left(\frac{1}{q\epsilon}+\ln\left(\frac{s}{s_1}\right)\right) + \text{ termes réguliers en } \epsilon \tag{45d}$$

Comportement de $P^{(d)}$ autour de z_2

$$P^{(d)}(z_1)\Big|_{\mathcal{B}(z_2,s)} = \frac{k^{(d)}}{4\pi}\int_{\mathcal{B}(z_2,s)} r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega^{(d-1)}\sum_{p,q} r^{p+q\epsilon} f^{2(\epsilon)}_{p,q}(\vec{n}_2)\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}}{\ell!}\partial_L\left(\frac{1}{r_{12}^{d-2}}\right) r^{\ell} n_2^L \tag{46a}$$

(46d)

Comportement de $P^{(d)}$ autour de z_2

$$P^{(d)}(z_1)\Big|_{\mathcal{B}(z_2,s)} = \frac{k^{(d)}}{4\pi}\int_{\mathcal{B}(z_2,s)} r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega^{(d-1)}\sum_{p,q} r^{p+q\epsilon} f^{2(\epsilon)}_{p,q}(\vec{n}_2)\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\partial_L\left(\frac{1}{r_{12}^{d-2}}\right) r^\ell n_2^L \tag{46a}$$

$$= \frac{k^{(d)}}{4\pi}\sum_{p,q}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left\langle n_2^L f^{2(\epsilon)}_{p,q}\right\rangle_2 \frac{(-1)^\ell}{\ell!}\partial_L\left(\frac{1}{r_{12}^{d-2}}\right)\int_0^s r^{d-1+p+q\epsilon+\ell}\mathrm{d}r \tag{46b}$$

(46d)

Comportement de $P^{(d)}$ autour de z_2

$$P^{(d)}(z_1)\Big|_{\mathcal{B}(z_2,s)} = \frac{k^{(d)}}{4\pi}\int_{\mathcal{B}(z_2,s)} r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega^{(d-1)}\sum_{p,q} r^{p+q\epsilon} f^{2(\epsilon)}_{p,q}(\vec{n}_2)\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\partial_L\left(\frac{1}{r_{12}^{d-2}}\right) r^\ell n_2^L \tag{46a}$$

$$= \frac{k^{(d)}}{4\pi}\sum_{p,q}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left\langle n_2^L f^{2(\epsilon)}_{p,q}\right\rangle_2 \frac{(-1)^\ell}{\ell!}\partial_L\left(\frac{1}{r_{12}^{d-2}}\right)\int_0^s r^{d-1+p+q\epsilon+\ell}\mathrm{d}r \tag{46b}$$

$$= \frac{k^{(d)}}{4\pi}\sum_{p,q}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left\langle n_2^L f^{2(\epsilon)}_{p,q}\right\rangle_2 \frac{(-1)^\ell}{\ell!}\partial_L\left(\frac{1}{r_{12}^{d-2}}\right)\frac{s^{\epsilon(q+1)+p+\ell+3}}{\epsilon(q+1)+p+\ell+3} \tag{46c}$$

(46d)

Comportement de $P^{(d)}$ autour de z_2

$$P^{(d)}(z_1)\Big|_{\mathcal{B}(z_2,s)} = \frac{k^{(d)}}{4\pi}\int_{\mathcal{B}(z_2,s)} r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega^{(d-1)}\sum_{p,q} r^{p+q\epsilon} f^{2(\epsilon)}_{p,q}(\vec{n}_2)\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}}{\ell!}\partial_L\left(\frac{1}{r_{12}^{d-2}}\right) r^{\ell} n_2^L \tag{46a}$$

$$= \frac{k^{(d)}}{4\pi}\sum_{p,q}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left\langle n_2^L f^{2(\epsilon)}_{p,q}\right\rangle_2 \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!}\partial_L\left(\frac{1}{r_{12}^{d-2}}\right)\int_0^s r^{d-1+p+q\epsilon+\ell}\mathrm{d}r \tag{46b}$$

$$= \frac{k^{(d)}}{4\pi}\sum_{p,q}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left\langle n_2^L f^{2(\epsilon)}_{p,q}\right\rangle_2 \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!}\partial_L\left(\frac{1}{r_{12}^{d-2}}\right)\frac{s^{\epsilon(q+1)+p+\ell+3}}{\epsilon(q+1)+p+\ell+3} \tag{46c}$$

$$= \frac{k^{(d)}}{4\pi}\sum_{q}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left\langle n_2^L f^{2(\epsilon)}_{-\ell-3,q}\right\rangle_2 \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!}\partial_L\left(\frac{1}{r_{12}^{d-2}}\right)\left(\frac{1}{\epsilon(q+1)}+\ln\left(\frac{s}{s_2}\right)\right)$$

$$+ \text{ termes réguliers en } \epsilon \tag{46d}$$

Résultat final : correction à la régularisation d'Hadamard

La correction à la régularisation d'Hadamard est donnée par :

$$\mathcal{D}P_A \equiv \left\langle P^{(d)} \right\rangle_A^{\mathrm{DR}} - \langle P \rangle_A \tag{47}$$

La correction de régularisation de l'intégrale de Poisson $\mathcal{D}P_1$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}P_1 = -\frac{k^{(d)}}{4\pi} \Bigg(& \sum_{q_0 \leq q \leq q_1} \left(\frac{1}{q\epsilon} + \ln(r_1') - 1 \right) \left\langle f^{1(\epsilon)}_{-2,q} \right\rangle_1 \\ & + \sum_{q_0 \leq q \leq q_1} \left(\frac{1}{(q+1)\epsilon} + \ln(s_2) \right) \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \partial_L \left(\frac{1}{r_{12}^{1+\epsilon}} \right) \left\langle n_2^L f^{2(\epsilon)}_{-\ell-3,q} \right\rangle_2 + \mathcal{O}(\epsilon) \Bigg)\end{aligned} \tag{48}$$

→ Compensation des paramètres de coupure r_1' et s_2 : **dimreg indépendante des paramètres de coupure**.

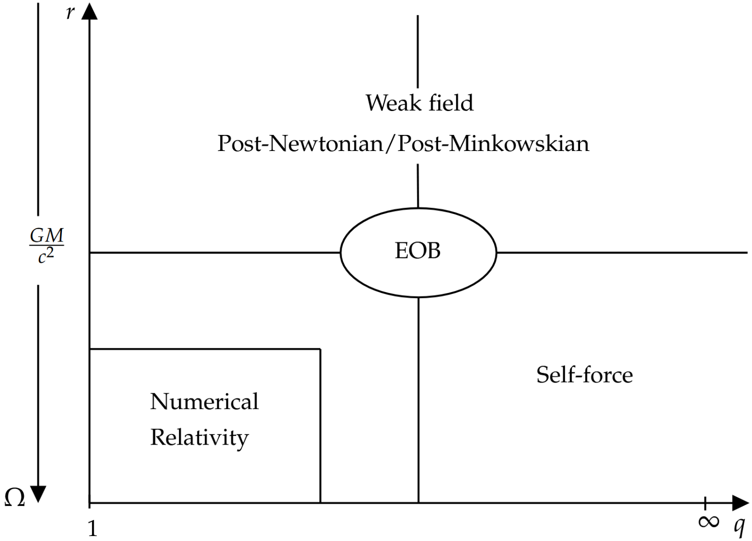
Conclusions

Conclusions

- Hadamard : pratique mais non distributif $\rightarrow$ ambiguïtés à l'ordre 3PN
- Dimreg : *parameter-free* et conserve l'invariance par difféomorphisme

$\hookrightarrow$ pour 3PN et au-delà, il faut régulariser dimensionnellement.

Backup slides



Backup slides

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{Gm_2}{r_{12}^2}\boldsymbol{n}_{12} + \overbrace{\frac{1}{c^2}\left\{\left[\frac{5G^2m_1m_2}{r_{12}^3} + \frac{4G^2m_2^2}{r_{12}^3} + \cdots\right]\boldsymbol{n}_{12} + \cdots\right\}}^{\text{1PN Lorentz-Droste-Einstein-Infeld-Hoffmann term}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{c^4}[\cdots]}_{\text{2PN}} + \underbrace{\frac{1}{c^5}[\cdots]}_{\substack{\text{2.5PN} \\ \text{radiation reaction}}} + \underbrace{\frac{1}{c^6}[\cdots]}_{\text{3PN}} + \underbrace{\frac{1}{c^7}[\cdots]}_{\substack{\text{3.5PN} \\ \text{radiation reaction}}} + \underbrace{\frac{1}{c^8}[\cdots]}_{\substack{\text{4PN} \\ \text{conservative \& radiation tail}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^9}\right)$$