

Chapitre 1: introduction

I. MOTIVATION

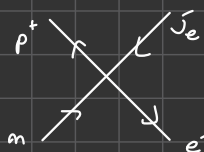
À l'origine, on voulait calculer des amplitudes QCD et des interactions $q-\bar{q}$



On a alors constaté que les équations étaient comme si le quark et l'antiquark étaient reliés par une corde. Les physiciens ont alors pris au sérieux l'idée et on fait des calculs. Il est alors apparu une particule sans masse de spin 2 : le graviton!

À l'époque l'existence du graviton n'avait pas raison d'être. Ce n'est que plus tard qu'est apparu la nécessité d'avoir un tel graviton dans nos théories afin d'unifier gravitation et QFT.

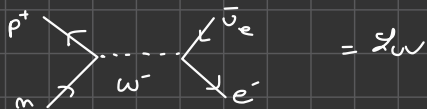
De manière générale, lorsqu'on établit une théorie en physique, il faut pouvoir faire la lien entre haute et basse énergie. Par exemple, lorsque l'on regarde une interaction de Fermi à 4 champs :



forme quadratique dans $\mathcal{L}_{4F}$.

La fonctionne à basse énergie mais diverge à haute

Il faut alors postuler l'existence d'une particule intermédiaire massive :



$= \mathcal{L}_{W}$

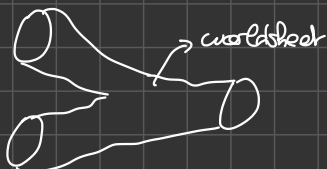
La théorie à haute énergie est cohérente avec celle à basse énergie car il suffit de prendre la limite à basse énergie de $\mathcal{L}_W$:



Pour la gravité, cette stratégie ne marche pas car on a des vertex cubiques :



En théorie des cordes, ce genre d'interaction n'est plus traitée avec des particules ponctuelles et des lignes d'univers, mais avec des cordes et des surfaces d'univers.



II. PHÉNOMÉNOLOGIE

Avec la théorie des cordes, on a gravité, champs de jauge et fermions chiraux. A priori, on a tout pour décrire le SM et la gravitation, ce qui mènerait à une théorie du tout.

↳ Problème : • pas le même nombre de fermion que SM ou pas exactement le même potentiel de Yukawa

• Sélections du vide permettant d'ajuster et corriger ces défauts sont arbitraires.

III. MATHÉMATIQUE PHYSIQUE

La théorie des cordes permet de résoudre des problèmes de math que l'on n'arrivait pas à résoudre avant. Par exemple, elle a permis de démontrer l'existence d'une symétrie miroir par certaines variétés différentielles 6-dimensionnelles.

Chapitre 2: particule ponctuelle

Considérons une particule libre qui se propage en $\mathbb{R}^{1, D-1}$, avec ^{esp. Mink. en d-dim.}

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1).$$

La particule libre va se déplacer le long d'une ligne d'univers paramétrée par le temps propre τ . La trajectoire de la particule sera donc décrite par les coord.

(plongement)

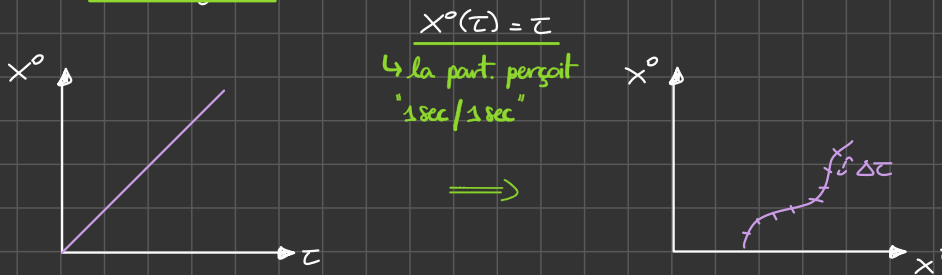
$$X^\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{1, D-1}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 ligne d'univers espace cible

$$\tau \mapsto X^\mu(\tau)$$

$$\mu = 0, \dots, D-1.$$

On travaille dans la jauge physique



L'action associée est

$$S = -m \int d\tau \sqrt{1 - \|\dot{\vec{x}}\|^2}$$

avec $\vec{x} = (x^1, \dots, x^{D-1})$ et $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\tau}$.

Si on prend la limite non-relativiste ($\|\dot{\vec{x}}\| \ll 1$), on sort de la jauge physique et

$$S \approx -m \int d\tau \cdot \left\{ -1 + \frac{1}{2} \|\dot{\vec{x}}\|^2 + \dots \right\}$$

et les eqs d'Euler-Lagrange sont donc

$$\frac{d}{d\tau} (m \dot{x}^i) = 0 \quad \forall i$$

on définit la quantité de mouvement conjuguée

$$\vec{p} = \frac{m \dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \|\dot{\vec{x}}\|^2}}$$

et on a l'hamiltonien

$$\mathcal{H} = \sum_i p^i \dot{x}^i - \mathcal{L} = \frac{m}{\sqrt{1 - \|\dot{\vec{x}}\|^2}}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{m^2 + \|\vec{p}\|^2}.$$

Preons une jauge plus générale :

$$\mathcal{L} = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu}}$$

où $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. Alors

$$p^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{x}^\mu} = \frac{m \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu}}{\sqrt{-\dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma \eta_{\rho\sigma}}}$$

et on a

$$p^\mu p_\mu + m^2 = 0$$

avec $(p^0)^2 > m^2$ pour avoir une propagation causale.

I. SYMÉTRIES DE L'ACTION

L'action d'une particule ponctuelle possède 2 symétries :

- Symétrie de Poincaré sur l'espace-temps :

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu + c^\mu$$

avec $\begin{cases} \Lambda^\mu_\nu \eta^{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\rho = \eta^{\mu\sigma} \\ c^\mu \text{ sont des vecteurs constants} = \text{translation dans l'espace-temps.} \end{cases}$

- Invariance par reparamétrisation / difféo sur la ligne d'univers :

$$\tau \rightarrow \tilde{\tau}(\tau)$$

où $\tilde{\tau}(\tau)$ est monotone (on ne veut pas inverser le temps au cours de la trajectoire).

C'est une symétrie parce que

$$\begin{cases} d\tau = d\tilde{\tau} \left(\frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} \right)^{-1} \\ \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tilde{\tau}} \cdot \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}} \quad \text{Ⓢ}$$

Cette invariance explique pourquoi on peut prendre la jauge physique : on peut réabsorber x^0 en posant

$$\tilde{\tau} = x^0(\tau).$$

Dans un espace cible à $(0+1)$ -dimensions, cette invariance constitue un principe de covariance générale (x^μ sont des champs scalaires : lorsque l'on considère la pte de la ligne d'univers $(0+1d)$).

→ Théorie compatible avec la gravitation à 1d.

II. COMPARAISON MQ ET QFT

Mécanique quantique

• Variable : t

• Opérateurs : $\hat{x}^i(t), \hat{p}^i(t), \hat{T}(\hat{x}^i, \hat{p}^i)$

• Fonction d'onde : $\psi(x^i, t)$ tq $i \frac{d\psi}{dt} = H\psi$.

→ MQ est une QFT à $(0+1)$ -dimension

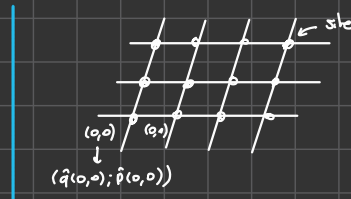
Théorie quantique des champs

• Variable : x^μ

$(D-1)+1$ dimensions

• Opérateur : $\hat{\phi}(x^\mu)$

Si on discrétise l'espace, on observe que la QFT est une copie de la MQ en chaque point, car l'on a pris la limite continue



$$\{q_i, p_i\} \rightarrow \{\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(x)\}.$$

Intégrale de chemin

Les deux théories peuvent se reformuler dans le formalisme des intégrales de chemin :

$$\begin{array}{l} \text{MQ :} \quad Z = \int \mathcal{D}q(\tau) \cdot e^{i \int \mathcal{L}(q, \dot{q})} \\ \text{QFT :} \quad Z = \int \mathcal{D}\phi(x^\mu) \cdot e^{i \int \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)} \end{array}$$

III. EINBEIN

L'action que nous avons introduite précédemment

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu}}$$

possède 2 problèmes :

- la racine rend compliqué la quantification
- si $m=0$, $S=0 \rightarrow$ on ne peut rien faire.

La solution est d'introduire un champ auxiliaire $e(\tau)$ tq

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \cdot \left\{ e^{-1} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu} - e \cdot m^2 \right\}$$

e = multiplicateur de Lagrange

Les EOI sont alors

$$\bullet X^\mu : \frac{d}{d\tau} (e^\tau X^\mu) = 0$$

$$\bullet e : \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu} + e^2 m = 0 \quad (\text{eq. sous forme cinétique} \rightarrow \text{EOI algébriques})$$

avec $\dot{X}^2 = \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}$.
 métrique du
 temps espace
 ↓
 métr. invar. $\bar{g}$ difféo.

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau} \left(\frac{m \dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}} \right) = 0 \quad (\text{théorie} \Rightarrow \text{à la précédente})$$

↳ eq. rela. de mouvement
 pour une part.

Lorsque $m=0$, on a

$$\dot{X}^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad \dot{X}^2 = 0 \quad (\text{trajectoire de type lumière}).$$

Interprétation

Le champ $e(\tau)$ peut être vu comme un einbein :

$$e^2 = g_{\tau\tau} = \text{métrique pour la ligne d'univers}$$

et l'action est

$$S = -\frac{1}{2} \int d\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}} \left(g^{\tau\tau} \frac{dX^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dX^\nu}{d\tau} \eta_{\mu\nu} + m^2 \right)$$

On a donc introduit une théorie de la gravitation 1d pour résoudre le problème.

Les EOI sont

$$X^\mu : \frac{d}{d\tau} \left(\sqrt{-g^{\tau\tau}} g^{\tau\tau} \frac{dX^\mu}{d\tau} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \square_{0+1} X^\mu(\tau) = 0$$

On a toujours l'invariance sous reparam. et on a une théorie qui a la covariance générale. On peut voir la particule ponctuelle comme une QFT à 0+1d avec des champs scalaires de type K-G et gravité quantique.

On peut de l'intégrale de chemins,

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}X^\mu(\tau) \mathcal{D}g_{\tau\tau}(\tau) e^{iS_2[X^\mu, g_{\tau\tau}]} \\ &= \int \mathcal{D}X^\mu(\tau) e^{iS_1(X^\mu)} \end{aligned}$$

→ correspondance entre S_1 et S_2 (équivalence).

↳ d scalaires (K-G) + gravité
 (X^μ) $(g_{\tau\tau})$

Chapitre 3 : corde classique



Pour une corde, on ajoute 1 dimension $\hookrightarrow$

$$X^\mu: \Sigma_g \rightarrow \mathbb{R}^{1,d-1}$$

$$X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$$

avec $\Sigma_g = \begin{cases} \mathbb{R} \times S^1 & \text{(corde fermée)} \\ \mathbb{R} \times [0, \pi] & \text{(corde ouverte)} \end{cases}$, une surface de Riemann.

Il s'agit d'une QFT à $(1+1)$ -dimension pour laquelle on va minimiser une surface relativiste.

I. ACTION DE NAMBU - GOTO

En partant de cette idée de minimisation de surface, on peut alors définir l'action de N-G

$$S_{NG}^I = -T \int d\sigma d\tau \sqrt{-\det \gamma}$$

où T est la tension de la corde (énergie/lg) et la métrique induite est $\rightarrow$ induite par le fait de mettre la métr. plate de un esp. $\mathbb{R}^{1,d-1}$
= cste

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \cdot \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta} \eta_{\mu\nu}$$

avec $\sigma^0 = \tau$ et $\sigma^1 = \sigma$. Comme la tension est un paramètre fixe, + il y a d'énergie, + la corde est grande.



petite masse



grande masse

Afin de minimiser l'énergie potentielle, la corde aura tendance à se réduire en taille. Si: $T \rightarrow 0$, il y a collapse de la corde.

$\hookrightarrow$ comme "collapse" de l'action pour $m \rightarrow 0$
 $\Rightarrow$ introduit un chps aux.

II. ACTION DE POLYAKOV

Tout comme avec la particule, l'action de Nambu-Goto pose problème à cause de la racine. Il est alors cher d'introduire un champ auxiliaire: $g_{\alpha\beta}$ $\hookrightarrow$

$$S_{Pol}^I = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

Polyakov

$$\text{où } T = \frac{1}{4\pi\alpha'}$$

cste de couplage

On a alors introduit un champ de gravité en 2d. Dans le formalisme de l'intégrale de chemin, on a

$$Z = \int \mathcal{D}X^\mu \mathcal{D}g_{\alpha\beta} e^{i S_{Pol}}$$

$\downarrow$
 $\mathcal{D}$ champs scalaires $\rightarrow$ gravité en 2d

Ici, il s'agit d'une théorie de la gravité topologique, se elle ne contient pas de termes cinétiques de type

$$\int \sqrt{-g} \cdot R_{2d}(g_{\alpha\beta}).$$

Cela est dû au fait que

$$\underline{G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0}$$

est une équation en 2d.

Les EOM sont

$$\bullet \frac{\delta S}{\delta X^\mu} = 0 \Leftrightarrow \partial_\alpha (\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\square_{2d,g} X^\mu = 0} \quad \text{N-G en 2d}$$

$$\bullet \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{T_{\alpha\beta} = 0} \quad \text{car } G_{\mu\nu} = 0 \quad \underline{\text{éq. d'Einstein en 2d}}.$$

$$\text{où } T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}}. \text{ On a donc}$$

$$T_{\alpha\beta} = \left(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \partial_\rho X^\mu \partial_\sigma X^\nu \right) \eta_{\mu\nu} = 0$$

$$\Leftrightarrow g_{\alpha\beta} = f(\sigma, \tau) \cdot \left(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \right) \eta_{\mu\nu}$$

$\rightarrow$ contrainte algébrique sur $g_{\alpha\beta}$ (car pas de terme cinétique)

Symétries de l'action

- Poincaré sur le target space (symétrie interne)

$$X^\mu(\sigma, \tau) \rightarrow \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\sigma, \tau) + c^\mu \quad \text{c'est Poincaré si } d=26$$

De pdr de la worldsheet (σ, τ) , il s'agit d'une symétrie interne sur les champs (= symétrie de saveur)

- Reparamétrisation / difféomorphisme (symétrie d'espace-temps)

$$\sigma \rightarrow \tilde{\sigma}(\sigma, \tau)$$

Il s'agit d'une symétrie d'espace-temps en $(1+1)$ -dim. En particulier, comme $\tilde{\sigma}^\alpha$ est une fct qm, il s'agit du principe de covariance générale à 2d ! Si on était dans N-G, on n'aurait pas ça car on a pas de métrique dynamique.

Cette lpo $\Rightarrow$

$$g_{\alpha\beta}(\sigma, \tau) \rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) = \frac{\partial \sigma^\gamma}{\partial \tilde{\sigma}^\alpha} \cdot \frac{\partial \tau^\delta}{\partial \tilde{\tau}^\beta} g_{\gamma\delta}(\sigma, \tau)$$

$$X_\mu(\sigma, \tau) \rightarrow \tilde{X}_\mu(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) = X_\mu(\sigma, \tau)$$

$$\partial_\alpha X^\mu(\sigma, \tau) \rightarrow \tilde{\partial}_\alpha X^\mu(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) = \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial \tilde{\sigma}^\alpha} \cdot \partial_\beta X^\mu(\sigma, \tau)$$

• Invariance de Weyl (symétrie interne)

$g_{\alpha\beta}(\sigma) \rightarrow \Omega^2(\sigma) \cdot g_{\alpha\beta}(\sigma)$ où $\Omega^2 = \Omega^\mu_\mu$ ds métrique car $g^{\alpha\beta}$ inverse de $g_{\alpha\beta}$
 or $\begin{cases} \sigma^\mu \rightarrow \sigma^\mu \\ x^\mu \rightarrow x^\mu \end{cases}$

avec $\Omega^2(\sigma)$ une fct scalaire arbitraire positive (pour ne pas changer la signature). Il s'agit d'une symétrie interne spécifique au cas à 2d. En effet,

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} &\rightarrow \Omega^d \sqrt{-g} \\ g^{\alpha\beta} &\rightarrow \Omega^{-2} g^{\alpha\beta} \end{aligned} \Rightarrow \Omega^d \Omega^{-2} = 1 \text{ si } d=2.$$

L'invariance de Weyl mène à

$$T^\alpha_\alpha = 0,$$

si $d=2$. En effet,

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \partial_\rho x^\mu \partial_\sigma x^\nu \eta_{\mu\nu} \\ \Rightarrow T^\alpha_\alpha &= g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = (\partial x)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (\partial x)^2 = 0 \quad \square \end{aligned}$$

III. TRANSFORMATIONS CONFORMES

Une tps conforme est un diffeo tq

$$\sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}^\alpha(\sigma)$$

$$g^{\alpha\beta} \rightarrow \tilde{g}^{\alpha\beta}(\tilde{\sigma}) = \Omega^2(\sigma) g^{\alpha\beta}(\sigma)$$

où $\Omega^2(\sigma)$ est le facteur conforme. Elle fixe les angles mais pas les distances (ie projection stéréo.)

Si on a l'invariance par reparamétrisation et l'invariance de Weyl, on a l'invariance conforme.

Par la gravité à 2d, cette invariance a des conséquences sur les ddf de $g_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix} \text{ avec } g_{01} = g_{10} \rightarrow 3 \text{ ddf} \\ + \\ \text{reparam. : } g_{\alpha\beta} &\rightarrow g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \varepsilon_\beta + \partial_\beta \varepsilon_\alpha \quad (\sigma^\mu \rightarrow \sigma^\mu + \varepsilon^\mu(\sigma)) \rightarrow \text{ajoute 2 ddf localement} \\ + \\ \text{Weyl : } g_{\alpha\beta} &\rightarrow \Omega^2(\sigma) \cdot g_{\alpha\beta} \rightarrow \text{ajoute 1 ddf} \\ &\rightarrow \text{la métrique a 0 ddf.} \end{aligned}$$

Localement, en 2d, il est toujours possible de trouver un difféo et une hfo de Weyl tq

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow \Omega^2(\sigma) \eta_{\alpha\beta} \quad \text{métrique conformément plate}$$

$$\Omega^2(\sigma) \eta_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$$

Ainsi, en 2d, l'espace-temps est toujours localement plat.

→ conséquence : découplage de la gravité en 2d.

difféo = hfo de jauge

En effet,

$$\begin{aligned} Z &= \int dX^\mu \cdot d g_{\alpha\beta} \cdot e^{i S_{\text{rel}}(X^\mu, g^{\alpha\beta})} \\ &= \int dX^\mu \cdot d g_{\alpha\beta} \cdot e^{i S_{\text{rel}}(X^\mu)} \\ &= \int d g_{\alpha\beta} \int dX^\mu \cdot e^{i S_{\text{rel}}(X^\mu)} \end{aligned} \quad \text{hfo conforme}$$

où l'on a effacé une hfo conforme tq

$$S_{\text{rel}} \rightarrow \tilde{S}_{\text{rel}} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta}$$

et ça ressemble aux champs scalaires libre sans masse de k-G :

$$- (\partial_\alpha X^\mu) \partial^\alpha X^\mu + \frac{1}{2} \partial_\alpha X^i \partial^\alpha X^i$$

IV. EQUATIONS DU MOUTEMENT (corde fermée)

Klein-Gordon

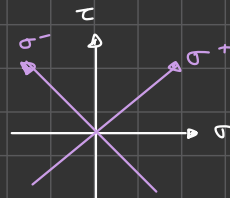
On a

$$\square X^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2) X^\mu = 0. \quad \rightarrow \text{sol. sont des fct périod.}$$

$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$

On passe aux coordonnées du cône de lumière

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$$



et les eqs de k-G deviennent

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0.$$

Les solutions sont du type

$$X^\mu(\sigma^+, \sigma^-) = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-). \quad (\text{left \& right mover})$$

Par une corde fermée, on a

$$X^\mu(\sigma + 2\pi, \tau) = X^\mu(\sigma, \tau)$$

On décompose les solutions en modes de Fourier

$$\begin{cases} X_L^\mu(\sigma^+) = \sum_n \tilde{c}_n^\mu e^{-im\sigma^+} + \tilde{k}\sigma^+ \\ X_R^\mu(\sigma^-) = \sum_n c_n^\mu e^{-im\sigma^-} + k\sigma^- \end{cases}$$

et la périodicité impose ($\sigma^+ + \sigma^- = 2\pi$)

$$\tilde{k} = k.$$

On a donc

$$\partial_- X(\sigma^-) = \sqrt{\alpha'} \sum_n \alpha_n e^{-im\sigma^-} ; \quad \partial_+ X(\sigma^+) = \sqrt{\alpha'} \sum_n \tilde{\alpha}_n e^{-im\sigma^+}$$

en renommant les constantes et

$$\begin{cases} X_L^\mu(\sigma^+) = \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} \alpha' p^\mu \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-im\sigma^+} \\ X_R^\mu(\sigma^-) = \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} \alpha' p^\mu \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-im\sigma^-} \end{cases}$$

où $x^\mu, p^\mu, \alpha_n^\mu$ et $\tilde{\alpha}_n^\mu$ sont des constantes car que les champs soient réels :

oscillateurs

$$(\alpha_n^\mu)^* = \alpha_{-n}^\mu \quad \text{et} \quad (\tilde{\alpha}_n^\mu)^* = \tilde{\alpha}_{-n}^\mu.$$

On a

$$X^\mu = x^\mu + \alpha' p^\mu \tau$$

Si α et $\tilde{\alpha} = 0$

$\rightarrow x^\mu = \text{position du CT}$ et $p^\mu = \text{impulsion}$.

Equations d'Einstein

Dans les coordonnées du cône de lumière,

$$\begin{cases} T_{++} = (\partial_+ X^\mu)(\partial_+ X^\nu) \eta_{\mu\nu} \\ T_{--} = (\partial_- X^\mu)(\partial_- X^\nu) \eta_{\mu\nu} \\ T_{+-} = T_{-+} = 0 \end{cases} \quad \text{triviale en 2d du fait que sans trace}$$

On a

$$d\tau = \frac{d\sigma^+ + d\sigma^-}{2} ; \quad d\sigma = \frac{d\sigma^+ - d\sigma^-}{2}$$

$$\Rightarrow d\sigma^2 = -d\sigma^+ d\sigma^-$$

$$\Rightarrow g_{+-} = g_{-+} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad g_{++} = g_{--} = 0$$

$$\Rightarrow T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -T_{+-} = 0.$$

Les équations sont donc

$$\begin{cases} T_{++} = 0 \\ T_{--} = 0 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\bullet T_{--} = (\partial_- X)^2 = \alpha' \sum_m L_m e^{-im\sigma^-} = 0$$

$$\text{où } L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n}^\mu \alpha_n^\nu \eta_{\mu\nu} \quad \text{et } \alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu.$$

$$\bullet T_{++} = (\partial_+ X)^2 = \alpha' \sum_m \tilde{L}_m e^{-im\sigma^+} = 0$$

$$\text{où } \tilde{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{m-n}^\mu \tilde{\alpha}_n^\nu \eta_{\mu\nu} \quad \text{et } \tilde{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu.$$

$$\Rightarrow \boxed{L_m, \tilde{L}_m = 0 \quad \forall m} \quad \text{constantes physiques}$$

Interprétation physique des solutions

• On a

$$X^\mu = x^\mu + \alpha' p^\mu \tau \quad (\text{règle})$$

si α et $\tilde{\alpha} = 0$

$\rightarrow x^\mu = \text{position du CT}$ et $p^\mu = \text{impulsion}$.

• α et $\tilde{\alpha}$ = oscillateurs et

$$X_L^\mu(\sigma^+) = \text{left mover cor} \quad \sigma^+ = \tau + \sigma \Rightarrow X_L^\mu \propto e^{-im\sigma} \equiv e^{-i2\pi\alpha}$$

$$X_R^\mu(\sigma^-) = \text{right mover cor} \quad \sigma^- = \tau - \sigma \Rightarrow X_R^\mu \propto e^{im\sigma} \equiv e^{i2\pi\alpha}$$

• On a

$$L_0 = 0 \Leftrightarrow -p^\mu p_\mu = \frac{4}{\alpha'} \sum_{m>0} \alpha_m \cdot \alpha_{-m} = M^2$$

$$\tilde{L}_0 = 0 \Leftrightarrow -p^\mu p_\mu = \frac{4}{\alpha'} \underbrace{\sum_{m>0} \tilde{\alpha}_m \cdot \tilde{\alpha}_{-m}}_{\text{\# oscillateurs}} = M^2$$

En fonction de l'état vibratoire de la corde, on a des masses différentes:

$$\boxed{M^2 = \frac{4}{\alpha'} \sum_{m>0} \alpha_m \cdot \alpha_{-m}}$$

La corde n'a pas de lg fixe mais une tension fixe. Tous les brins ont la même corde.

$$[\tau] = \frac{E}{L} = E^2 = \frac{1}{L^2} \quad \text{et} \quad \tau \propto \frac{1}{\alpha'} \Rightarrow [\alpha'] = L^2$$

Récrivons les éqs d'Einstein dans les coord (τ, σ) .

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X \partial_\beta X - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho X \partial_\sigma X$$

$$\Rightarrow T_{00} = \dot{X}^2 - \frac{1}{2} (-1) (-\dot{X}^2 + X'^2) \\ = \frac{\dot{X}^2 + X'^2}{2}$$

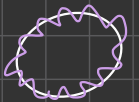
$$\text{avec } \dot{X} = \frac{dX}{d\tau} ; X' = \frac{dX}{d\sigma}$$

$$\Rightarrow T_{11} = \frac{\dot{X}^2 + X'^2}{2} = T_{00}$$

$$\Rightarrow T_{01} = T_{10} = \dot{X} \cdot X'$$

Les éqs d'Einstein sont alors

$$\begin{cases} \dot{X}^2 + X'^2 = 0 & (1) \\ \dot{X} \cdot X' = 0 & (2) \end{cases}$$



Si on fait le choix de jauge $X^0(\tau, \sigma) = \tau$, (2) $\Leftrightarrow$ vibrations de la corde sont uniquement transverses

Chapitre 4: la corde quantique

I. OLD COVARIANT WAY

On prend X^μ et Π^μ comme opérateurs avec

$$[\hat{X}^\mu(\sigma, z), \hat{\Pi}^\nu(\sigma', z)] = i \delta(\sigma - \sigma') \delta^{\mu\nu}.$$

$$\text{et } \delta(\sigma - \sigma') = \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{in(\sigma - \sigma')} \text{ et}$$

$$[\hat{x}^\mu, p_\nu] = i \delta^\mu_\nu \quad ; \quad [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m \eta^{\mu\nu} \delta_{m+n, 0}$$

On définit alors des ops de création et annihilation

$$\alpha_{-n}^{\mu\dagger} = \frac{\alpha_{-n}^\mu}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \alpha_n^\mu = \frac{\alpha_n^\mu}{\sqrt{n}} \quad n > 0$$

On a l'espace de Fock

$$\begin{aligned} \alpha_n^\mu |0, p\rangle &= 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}_n^\mu |0, p\rangle = 0 \\ &\vdots \\ (\alpha_{-1}^\mu)^{m_{-1}} (\alpha_{-2}^\mu)^{m_{-2}} \dots (\alpha_{-n}^\mu)^{m_{-n}} (\tilde{\alpha}_{-1}^\mu)^{m_{-1}} \dots |0, p\rangle \quad (\alpha_{-n})^\dagger \neq \alpha_{-n} \end{aligned}$$

Le problème avec cette espace de Fock est que la norme n'est pas d.p. Cela vient du fait que l'on a construit les rel. de commutation avec $\eta^{\mu\nu}$:

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^{\nu\dagger}] = m \eta^{\mu\nu} \delta_{m,n}$$

Certains états ont une norme négative:

$$\|\alpha_{-1}^0 |0, p\rangle\|^2 = \langle 0, p | \underbrace{\alpha_{-1}^0 \alpha_{-1}^0}_{-1} |0, p\rangle = \text{ghosts (se supprime via les contraintes de fixation de jauge)}$$

II. LIGHT-CONE QUANTIZATION

On se place dans les coord. du cône de lumière

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (X^0 \pm X^{D-1})$$

et dans l'espace cible, la métrique est

$$ds_\tau^2 = -2 dx^+ dx^- + \sum_{i=1}^{D-2} dx^i dx^i$$

et le produit scalaire est

$$A^\mu B_\mu = -A^+ B^- - A^- B^+ + \sum_{i=1}^{D-2} A^i B^i$$

On exploite l'invariance sous reparamétrisation

$$\sigma^+ \rightarrow \tilde{\sigma}^+(\sigma^+) \quad ; \quad \sigma^- \rightarrow \tilde{\sigma}^-(\sigma^-)$$

et

$$\mathcal{L}_S^{\mathcal{P}} = - d\sigma^+ d\sigma^- \xrightarrow{\text{diffé}} - \Omega^2 d\tilde{\sigma}^+ d\tilde{\sigma}^- \xrightarrow{\text{Weyl}} - d\tilde{\sigma}^+ d\tilde{\sigma}^-$$

→ ajoute la factor conforme

Les solutions étant du type

$$\begin{cases} X^+ = X_L^+(\sigma^+) + X_R^+(\sigma^-) \\ X^- = X_L^-(\sigma^+) + X_R^-(\sigma^-) \end{cases}$$

on peut choisir σ^+ et σ^- tq

$$\begin{cases} X_L^+ = \frac{1}{2} z^+ + \frac{\alpha'}{2} p^+ \tilde{\sigma}^+ \\ X_R^+ = \frac{1}{2} z^+ + \frac{\alpha'}{2} p^+ \tilde{\sigma}^- \end{cases}$$

relié.

$$\frac{\alpha'}{2} p^+ \tilde{\sigma}^+ = \frac{\alpha'}{2} p^+ \sigma^+ + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n} e^{-in\sigma^+}$$

$$\Rightarrow \boxed{X^+ = z^+ + \alpha' p^+ \tau} \quad \text{jauge du lightcone}$$

Comme $\tilde{\sigma}^+$ et $\tilde{\sigma}^-$ ont déjà été fixés, on ne peut pas faire la même chose pour X^- .

Par ailleurs les éq. d'Einstein sont

$$\begin{cases} (\partial_+ X)^2 = 0 \\ (\partial_- X)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \partial_+ X^- \partial_+ X^+ = \sum_{i=1}^{D-2} (\partial_+ X^i)^2 \quad \text{cf produit scalaire}$$

$$\begin{cases} \partial_+ X_L^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{D-2} (\partial_+ X^i)^2 \\ \partial_- X_R^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{D-2} (\partial_+ X^i)^2 \end{cases}$$

et en décomposant en modes de Fourier, on a

$$\boxed{\alpha_m^- = \sqrt{\frac{1}{2\alpha'}} \cdot \frac{1}{p^+} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{D-2} \alpha_{m-n}^i \alpha_n^i}$$

→ on a éliminé les redondances à l'aide des contraintes et on a

2.(D-2) oscillateurs à prendre en compte

↓

L ou R directions $\perp$ à la worldsheet (oscillat° transverses)

En fixant cette jauge, on choisit une direction particulière de temps et d'espace ($X^\pm$). Par conséquent, l'invariance de Lorentz est perdue $\forall$ calcul impliquant $X^\pm$.

Règles de quantification

On a

$$[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i \delta^{ij} \quad ; \quad [\hat{x}^-, \hat{p}^+] = -i \quad ; \quad [\hat{x}^+, \hat{p}^-] = -i$$

$$[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = m \delta^{ij} \delta_{m+n,0} \quad , \quad [\tilde{\alpha}_m^i, \tilde{\alpha}_n^j] = m \delta^{ij} \delta_{m+n,0}$$

De plus, il faut prendre en compte les contraintes classiques

$$L_m = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{L}_m = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Naïvement, on pourrait imposer

$$\hat{L}_m |2\rangle = 0 \quad ; \quad \hat{\tilde{L}}_m |2\rangle = 0$$

Cependant, cela est trop contraignant et mène à des incohérences. Il est préférable d'imposer

$$\langle 2_i | \hat{L}_m | 2_i \rangle = 0$$

et on prend

$$\tilde{L}_m |phys\rangle = 0 \quad \forall m > 0 \quad \text{et} \quad \tilde{L}_m^+ = \tilde{L}_{-m}$$

En ce qui concerne L_0 , on a

$$L_0 = \sum_{m \neq 0} \alpha_m \cdot \alpha_{-m}$$

→ ambiguë sur l'ordre car α_m et α_{-m} ne commutent pas

On paramètre notre ignorance

$$\begin{cases} (L_0 - a) |phys\rangle = 0 \\ (\tilde{L}_0 - a) |phys\rangle = 0 \end{cases}$$

La formule de masse devient

$$\frac{\alpha'}{4} M^2 = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-m} \cdot \tilde{\alpha}_m}_{\tilde{N}} - a$$

$$\Rightarrow (L_0 - \tilde{L}_0) |phys\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow (N - \tilde{N}) |phys\rangle = 0 \quad \text{level-matching cond.}$$

et

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} (N - a) = \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N} - a)$$

Classiquement, on a

$$\frac{1}{2} \sum_{m \neq 0} \alpha_{-m}^i \cdot \alpha_m^i = \frac{1}{2} \sum_{m < 0} \alpha_{-m}^i \alpha_m^i + \frac{1}{2} \sum_{m > 0} \alpha_{-m}^i \alpha_m^i$$

et on veut le normal ordering : créateurs à gauche

$a = \frac{1}{2}$ du normal ordering

$$\frac{1}{2} \sum_{m < 0} \alpha_{-m}^i \cdot \alpha_m^i = \frac{D-2}{2} \sum_{m > 0} m + \frac{1}{2} \sum_{m > 0} \alpha_{-m}^i \alpha_m^i = \sum_{m > 0} \alpha_{-m}^i \alpha_m^i + \frac{D-2}{2} \sum_{m > 0} m$$

Énergie du vide

et $\sum_{n=0} m = -\frac{1}{12} \quad \text{!}$

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(N - \frac{D-2}{24} \right) = \frac{4}{\alpha'} \left(\tilde{N} - \frac{D-2}{24} \right)$$

Spectre en énergie

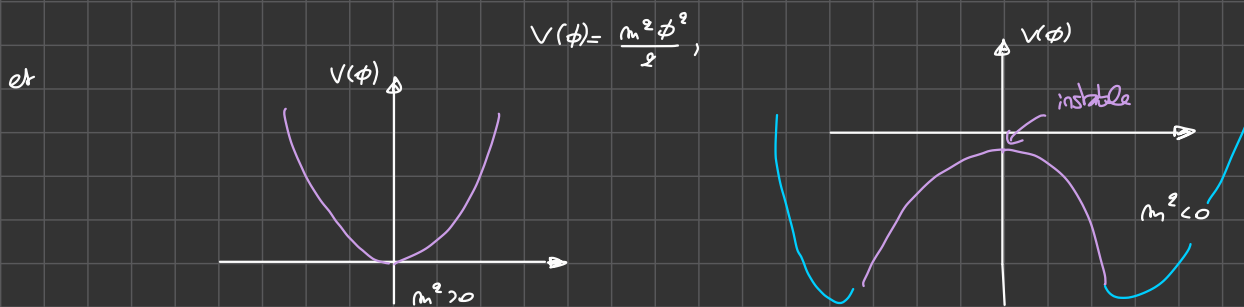
- L'état le plus simple est

$$N=0, \tilde{N}=0 : |0, p\rangle \quad (\text{ground state})$$

et

$$M^2 = -\frac{4}{\alpha'} \cdot \frac{D-2}{24} < 0 \rightarrow \text{tachyon !}$$

Le problème est que le tachyon mène à une instabilité et potentiellement à une énergie pas bounded from below. En effet, si ϕ un champ scalaire de potentiel $V(\phi)$. Sans interaction,



→ afin d'éviter que $E \rightarrow -\infty$, il faut ajouter des termes comme ϕ^4 . Cependant, on aura toujours une instabilité autour de 0.

⇒ la corde bosonique est instable.

- $N=1, \tilde{N}=1$:

$$\tilde{\alpha}_{-1}^i \propto \dot{x}_{-1}^i |0, p\rangle$$

et

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(1 - \frac{D-2}{24} \right) \quad i, j = 1, \dots, D-2$$

Pour ce 1^{er} état excité, il semblerait qu'il y ait un problème. En effet, i, j vont jusque $D-2$ donc les opérateurs $\tilde{\alpha}_{-1}^i$ et α_{-1}^j se lfs sous la rep. de $SO(D-2) \subset SO(1, D-1)$. Cependant, on aimerait que ces états puissent se lfs sous une rep. du groupe de Lorentz $SO(1, D-1)$ afin de récupérer l'invariance de Lorentz.

Pour ce faire, rappelons la notion de petit groupe :

- Particules massive : pour une particule massive plongée dans $\mathbb{R}^{1,D-1}$, il est toujours possible de trouver une lfs de Lorentz !

$$p^\mu = (E, \underbrace{0, \dots, 0}_{SO(D-1)})$$

Le système est alors invariant sous $SO(D-1)$ sur les indices spatiales.

petit groupe de $SO(1, D-1)$

→ toute particule massive doit former une rep. de $SO(D-1)$

Or, ici, la particule décrite possède $(D-2)^2$ états. $\mathcal{D}$ de rep. de $SO(D-1)$ de cette dim et donc, une particule massive ne peut pas former une rep. de $SO(1, D-1)$.

- Particule sans masse : il est possible de trouver une Léo de Lorentz L_μ

$$p^\mu = (\underbrace{E, 0, \dots, 0}_{SO(D-2)}, E)$$

petit groupe de $SO(1, D-1)$

et elle présente donc une symétrie de $SO(D-2)$ et correspondant à une rep. de ce petit groupe

Par conséquent, on doit imposer $M^2 = 0$ si on veut une théorie invariante sous $SO(1, D-1)$. On a donc

$$M^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{D-2}{24} = 0 \Leftrightarrow \boxed{D = 26} \quad \text{dimension critique}$$

Il faut donc un espace-temps à $D = 26$ pour la corde bosonique.

Le 1^{er} état excité est donc sans masse et forme une rep. $94 \otimes 94$ de $SO(94)$. Cette rep. est réductible et

$$94 \otimes 94 = \underbrace{\text{sans trace et symétrique}}_{\text{graviton : } G_{\mu\nu}} \oplus \underbrace{\text{anti-sym}}_{\text{champ de Kalb-Ramon (2-forme)}} \oplus \underbrace{\text{trace}}_{\text{dilaton}}$$

Autres états excités

On a récupéré l'invariance de Lorentz du 1^{er} état excité en imposant $D = 26$. Les autres états excités possèdent aussi des indices $i, j = 1, \dots, 24$ et seront massifs $\rightarrow$ ils doivent former une rep. de $SO(D-1)$.

En $N = 2 = \tilde{N}$, dans le secteur des R-modes, on a

$$\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0\rangle \quad \text{et} \quad \alpha_{-1}^i |0\rangle$$

et l'ensemble total des états de niveau 2 est

$$(\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \oplus \alpha_{-1}^i) \oplus (\tilde{\alpha}_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j \oplus \tilde{\alpha}_{-1}^i) |0; p\rangle$$

de masse

$$\boxed{M^2 = \frac{4}{\alpha'}}$$

Dans chaque secteur, on a

$$\frac{1}{2} (D-2)(D-1) + D-2 = \frac{1}{2} D(D-1) - 1 \text{ états}$$

$\hookrightarrow$ correspond à la rep. d'un tenseur symétrique sans trace de $SO(D-1)$.

En fait tous les états excités d'une corde $\equiv$ rep. de $SO(D-1)$.

Remarque

Si théorie fondamentale de la gravité quantique, tous ces états excités auront une masse proche de m_{p} et donc impossibles de les observer.

$\rightarrow$ vont jouer un rôle de processus de scattering + empêcher divergence UV de gravité.

III. CORDE OUVERTE

Considérons une corde ouverte $\sigma \in [0, \pi]$.

Equations du mouvement

Soit

$$S = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot \sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X.$$

Si on y ajoutait la constante cosmologique, on perdrait la symétrie de Weyl et on ne pourrait plus avoir $g = \eta$.

On a

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left(2 \partial_\alpha X \delta(\partial^\alpha X) \right) \\ &= \frac{-1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left\{ \partial_\alpha X \delta X - \square X (\delta X) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot \square X \cdot \delta X - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\partial\omega} (\delta X \partial^\alpha X) \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot \square X \cdot \delta X - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \cdot X \delta X \Big|_{\tau=\tau_i}^{\tau=\tau_f} - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\tau \cdot X' \cdot \delta X \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} \\ &\quad \text{on suppose } \delta X = 0 \text{ en } \tau_{i,f} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot \square X \cdot \delta X - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\tau \cdot X' \cdot \delta X \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} \end{aligned}$$

Les EOM sont donc

$$\square X^\mu = 0$$

avec les conditions aux bords tq le second terme soit nul. Il existe 2 types de conditions:

• Neumann : $X'^\mu \Big|_{\sigma=0,\pi}(\tau) = \partial_\sigma X^\mu \Big|_{\sigma=0,\pi}(\tau) = 0$

• Dirichlet : $\delta X^\mu \Big|_{\sigma=0,\pi}(\tau) = 0 \Rightarrow X^\mu \Big|_{\sigma=0,\pi}(\tau) = c^\mu$

$$\rightarrow DD, DN, ND, NN$$

Reprenons l'expansion en série de Fourier pour la corde et appliquons ces conditions aux bords:

$$X^\mu = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-)$$

avec

$$\begin{cases} X_L^\mu(\sigma^+) = \frac{1}{2} x^\mu + \alpha' p^\mu \sigma^+ + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \\ X_R^\mu(\sigma^-) = \frac{1}{2} x^\mu + \alpha' p^\mu \sigma^- + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \end{cases}$$

La condition de Neumann donne

$$\partial_\sigma X^\mu \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_m^\mu = \tilde{\alpha}_m^\mu$$

La condition de Dirichlet donne

$$X^\mu \Big|_{\sigma=0,\pi} = c^\mu \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_m^\mu = -\tilde{\alpha}_m^\mu \\ p^\mu = 0 \\ x^\mu = c^\mu \end{cases}$$

et avec D, il y a mode fondamental (ground state, $n=0$). Les conditions de N impliquent qu'il n'y a pas de distinction entre R et L-movers. Il n'y a donc pas de level-matching conditions. Le mode fondamental $\exists$.

Interprétation physique, champs scalaires et vectoriels

Exemple ($D=3$)

On choisit des conditions différentes selon les 3 directions.

$$\begin{cases} x \rightarrow DD & \text{avec } c^\mu = 0. \\ y \rightarrow NN \\ z \rightarrow NN \end{cases}$$

On a alors à disposition les opérateurs

$$x: \quad x, p_x, \quad \alpha_n^x = -\tilde{\alpha}_n^x$$

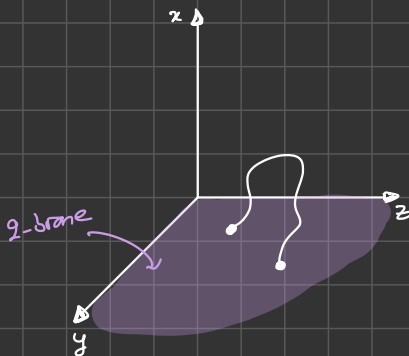
$$y: \quad y, p_y, \quad \alpha_n^y = \tilde{\alpha}_n^y$$

$$z: \quad z, p_z, \quad \alpha_n^z = \tilde{\alpha}_n^z$$

On a alors des états du type

$$|k_y k_z\rangle \rightarrow \phi(k_y, k_z) \rightsquigarrow \psi(y, z).$$

Les champs sont localisés en 2D (sur une 2-brane). On a une brisure de symétrie : $SO(3) \rightarrow SO(2) \times \mathbb{1}$.



Les états vont former 2 types de représentation / champs :

$$\begin{cases} \alpha_{-n}^y |k_y k_z\rangle \\ \alpha_{-n}^z |k_y k_z\rangle \\ \alpha_{-n}^x |k_y k_z\rangle \end{cases} \begin{cases} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{cases} \begin{cases} A_\mu(x, y) \\ \phi(x, y) \end{cases}$$

Dans le cas général, on a

DD : $D-k$ fois ; NN : k fois

→ les extrémités de la corde sont fixées sur une k -brane, i.e. sur une hypersurface d'espace-temps de dimension k .

On a donc

$$SO(1, D-1) \rightarrow SO(1, k-1) \times SO(D-k).$$

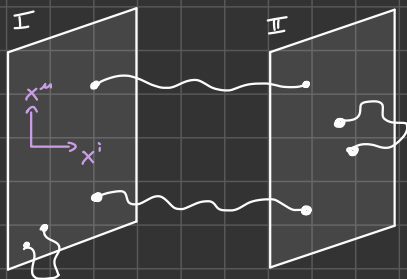
En résumé, si on fixe k NN et $D-k$ DD conditions, on a :

- NN directions : directions tangentielles de la brane
- DD directions : directions transverses de la brane
- un champ de k -vecteurs $D-k$ champs scalaires sur la brane de dimension k

III. PLUSIEURS BRANES DE MÊME DIMENSIONS (ET PARALLÈLES)

2 branes

Supposons maintenant 2 k -branes parallèles



→ on distingue 4 types de cordes :

II I, II II, I II, I I

Chapitre 5 : Théorie des champs conformes

I. Symétries Conformes

En QFT, on a la symétrie de Poincaré (+ symétries internes) qui donnent des contraintes sur les formes du lagrangien et sur les fonctions de corrélations $\langle \phi(x) \phi(y) \rangle$: ils doivent être réels et les fonctions de corrélation doivent dépendre que de $\|x-y\|$.

La CFT est une théorie qui comprend une symétrie qui généralise celle de Poincaré et va mener à des contraintes supplémentaires sur les fonctions de corrélations $\langle \phi(x) \phi(y) \rangle$.

Transformation de Poincaré

↳ difféomorphisme qui préserve la métrique :

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}$$

Transformation conforme

↳ difféomorphisme qui préserve la métrique à un facteur conforme près (préserve les angles) :

$$x^\mu \rightarrow f^\mu(x)$$

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} = \underbrace{\Lambda(x)}_{\text{scaling factor}} g^{\mu\nu}$$

Une CFT est donc une théorie invariante sous l'ho conforme. Il s'agit d'une théorie qui est invariante par changement d'échelle et qui ne se soucie que des angles.

Généralisation de l'équation de Killing

Soit une transformation conforme infinitésimale

$$\begin{cases} \Lambda(x) = 1 + \epsilon(x) \\ y^\tau = x^\tau + \epsilon^\tau(x) \\ \frac{\partial y^\tau}{\partial x^\mu} = \delta^\tau_\mu + \frac{\partial \epsilon^\tau}{\partial x^\mu}(x) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \Lambda \eta_{\mu\nu} &= (1 + \epsilon(x)) \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \left(\delta^\alpha_\mu + \frac{\partial \epsilon^\alpha}{\partial x^\mu}(x) \right) \left(\delta^\beta_\nu + \frac{\partial \epsilon^\beta}{\partial x^\nu}(x) \right) \\ \Leftrightarrow \cancel{\eta_{\mu\nu}} + \epsilon(x) \eta_{\mu\nu} &= \cancel{\eta_{\mu\nu}} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \epsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \epsilon^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \delta^\beta_\nu \frac{\partial \epsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \end{aligned}$$

et donc

$$K(x) \eta_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu}$$

généralisation de l'éq. de Killing
par espace plat qd $K=0$

Si on prend la trace de cette équation, on a

$$2 \partial_\mu \xi^\mu = d \cdot K$$

avec d la dimension de l'espace-temps.

→ K ne prend pas n'importe quelle valeur.

L'équation devient

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \frac{2}{d} \partial_\rho \xi^\rho \eta_{\mu\nu} \quad (1)$$

II. ALGÈRE DE LIÉ ET GROUPE CONFORME POUR $d > 2$

De l'équation (1), on apprend que $\partial_\mu \xi^\nu$ doit être linéaire en x et donc que $\xi_\mu(x)$ doit être quadratique en x :

$$\xi_\mu(x) = a_\mu + M_{\mu\nu} x^\nu + T_{\text{trans}} x^\alpha x^\beta$$

et $\in$ à l'alg. de Lie du groupe conforme.

Regardons l'interprétation des différents coeff:

- a_μ correspond à une translation d'espace-temps → générateur : P_μ .
- $M_{\mu\nu}^A$ (= partie antisym. de $M_{\mu\nu}$) correspond aux lfs de Lorentz → générateur : $M_{\mu\nu}^A = M_{\mu\nu}$

En effet, pour une lfs de Lorentz,

$$\partial_\mu \xi^\mu = 0 \rightarrow \text{car lfs de Lorentz} = \text{lfs conforme avec } \lambda = 1 \Rightarrow K=0 \Rightarrow$$

$$2 \partial_\mu \xi^\mu = d \cdot K = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial_\mu \xi^\mu = M_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu} + \text{termes linéaires en } x = 0$$

$$\Leftrightarrow M_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu} = 0$$

$$\Leftrightarrow M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu} = M_{\mu\nu}^A$$

- $M_{\mu\nu}^S = D \eta_{\mu\nu}$ correspond aux dilatations → générateur : D

En effet, soit $a_\mu = 0$ et $T_{\text{trans}} = 0$, l'éq (1) devient

$$M_{\mu\nu} + M_{\nu\mu} = \frac{2}{d} (\eta^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}) \eta_{\mu\nu}$$

$$\Leftrightarrow M_{\mu\nu}^S + M_{\nu\mu}^S = \frac{2}{d} \cdot \text{tr}(M^S) \eta_{\mu\nu}$$

et c'est le cas pour $M_{\mu\nu}^S = D \eta_{\mu\nu}$:

$$2D \eta_{\mu\nu} = \frac{2}{d} \cdot d \cdot D \eta_{\mu\nu} \quad \text{Q.E.D.}$$

- $T_{\mu\nu\rho} = \eta_{\mu\rho} b_\nu + \eta_{\nu\mu} b_\rho - \eta_{\nu\rho} b_\mu$ correspond aux lfs spéciales conformes $\rightarrow$ générateur : K_μ

Cela se montre en prenant (i) avec $\eta_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} = 0$.

$\rightarrow$ le groupe conforme comprend des translations, des lfs de Lorentz, des dilatations et des lfs spéciales conformes (TSC).

Si on ajoute d'autres générateurs, la théorie devient libre/triviale : Calman-Mondula thm.

Algèbre de Lie du groupe conforme et générateurs ($d \geq 2$)

Les générateurs de l'algèbre sont donc

-1	$P_\mu = -i \partial_\mu$ (translations)	$x'_\mu = x_\mu + a_\mu$
0	$M_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$ (Lorentz)	$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$
0	$D = -i x_\mu \partial^\mu$ (dilatations)	$x'_\mu = \alpha x_\mu$
1	$K_\mu = i(x^\alpha \partial_\mu - \partial_\alpha x^\mu)$ (TSC)	$x'_\mu = \frac{x_\mu - b_\mu x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2}$

Les relations de commutation non nulles sont

$$0+1=1$$

$$[D, K_\mu] = -i K_\mu$$

$$0-1=-1$$

$$[D, P_\mu] = i P_\mu$$

$$1-1=0$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu} D - M_{\mu\nu})$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho})$$

$$[K_\mu, M_{\nu\rho}] = i(\eta_{\mu\nu} K_\rho - \eta_{\mu\rho} K_\nu)$$

$$[P_\rho, M_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu} P_\nu - \eta_{\rho\nu} P_\mu)$$

On peut imaginer en étend l'espace d'une dimension et le temps d'une dimension : $\mathbb{R}^{1,d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2,d}$, on peut définir les générateurs

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}$$

$$J_{-1,0} = D$$

$$\mu = 1, \dots, d$$

$$J_{-1,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu)$$

$$J_{0,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu)$$

Ces générateurs ont pour relation de commu celle de $so(2, d)$.

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho})$$

$\hookrightarrow$ isomorphisme entre l'algèbre de Lie du groupe conforme en dim d et $so(2, d)$.

Si on avait pris une métrique euclidienne d'dim, on aurait un isomorphisme avec $so(1, d+1)$.

III. SYMÉTRIES CONFORMES À 2 DIMENSIONS (d=2)

Pour la suite, on travaille en métrique euclidienne par facilité, ie avec des coord. $(\sigma^1, \sigma^2) = (\sigma^1, i\sigma^0)$. Pour revenir en signature minkowskienne, il suffit de faire une rotation de Wick.

On introduit les coordonnées dans le plan complexe

$$z = \sigma^1 + i\sigma^2 \quad \text{et} \quad \bar{z} = \sigma^1 - i\sigma^2$$

avec

$$\partial_z = \partial = \frac{1}{2} (\partial_1 - i\partial_2) \quad \text{et} \quad \partial_{\bar{z}} = \bar{\partial} = \frac{1}{2} (\partial_1 + i\partial_2)$$

Dans ces coord, la métrique euclidienne devient

$$ds^2 = dz \cdot d\bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

On va considérer z et $\bar{z}$ comme des coord. indépendantes, ie on étend le worldsheet de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{C}^2$. Une fois les calculs effectués, il faudra imposer $\bar{z} = z^*$ afin de sélectionner un plan réel.

Dans le plan complexe, on peut imaginer que les hfs conformes sont générées par des hfs holomorphes. En effet, on a

$$\begin{cases} z \rightarrow z' = f(z) \\ \bar{z} \rightarrow \bar{z}' = \bar{f}(\bar{z}) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad ds^2 = dz \cdot d\bar{z} \rightarrow \underbrace{\frac{df}{dz} \cdot \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}}}_{\text{scaling factor}} \cdot dz d\bar{z}$$

A noter qu'il y a une infinité de hfs conformes menant à une algèbre de Lie de dimension infinie (> 0 au cas d=2)
 cf PB 1.3-TP1

Soit une hfs infinitésimale

$$z \rightarrow z + \varepsilon(z).$$

Les paramètres infinitésimaux $\varepsilon(z)$ admettent une expansion en série de Laurent

$$\varepsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^{n+1}$$

On peut alors imaginer que les générateurs associés sont (voir TP)

$$\begin{cases} L_n = -z^{n+1} \partial_z \\ \bar{L}_n = -\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}} \end{cases}$$

tg

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{n+m} \quad ; \quad [\bar{L}_n, \bar{L}_m] = (n-m) \bar{L}_{n+m}$$

algèbre de Witt

$$[L_n, \bar{L}_m] = 0$$

→ l'algèbre de Lie des hfs conformes à 2d est la somme direct de 2 copies de l'alg. de Witt. Cette alg. est bien infinie dimensionnelle.

Par ailleurs, si on considère les champs vectoriels qui génèrent ces hfs conformes :

$$V(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \underbrace{z^{n+1}}_{-l_n} \partial_z, \quad \bar{V}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{a}_n \underbrace{\bar{z}^{n+1}}_{-\bar{l}_n} \partial_{\bar{z}},$$

on peut imag. (TP) ces champs sont globalement bien définis uniquement pour les C.L. de

$$\{l_0, l_1, l_{-1}, \bar{l}_{-1}, \bar{l}_0, \bar{l}_1\}.$$

Il s'agit d'une sous-algèbre finie qui génère les hfs conformes globales en $d=2$. On y distingue les générateurs associés à ces hfs tq :

- générateur de translation :

$$l_{-1} = -\partial_z \quad \text{et} \quad \bar{l}_{-1} = -\partial_{\bar{z}} \quad (\text{translation selon } z \text{ et } \bar{z})$$

- générateur des TCS :

$$l_1 = -z^2 \partial_z \quad \text{et} \quad \bar{l}_1 = -\bar{z}^2 \partial_{\bar{z}}$$

- générateur des rotations :

$$l_0 - \bar{l}_0 = \partial_\theta$$

- générateur des dilatations :

$$l_0 + \bar{l}_0 = -r \partial_r$$

Le groupe généré par cette sous-algèbre est celui des hfs de Möbius, ie

$$z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$$

avec $ad-bc=1$ et $a,b,c,d \in \mathbb{C}$. Il s'agit du groupe $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3,1)$

IV. TENSEUR ENERGIE - IMPULSION

↳ courants conservés car invariance par translation.

Théorie sans gravitation ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$)

On considère l'action

$$S = \int d^d x \cdot \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi).$$

Soit la hfo infinitésimale

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon^\mu(x).$$

On a alors

$$\cdot d^4x \rightarrow \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x = \det \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \approx 1 + \text{tr} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = 1 + \partial_\rho \xi^\rho$$

$$\cdot \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi)$$

$$\Rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}' = \mathcal{S} + \int d^4x \cdot \left\{ \mathcal{L} \cdot \partial_\rho \xi^\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right\}$$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{S} = \int d^4x \cdot \left\{ \mathcal{L} \cdot \partial_\rho \xi^\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\mu (\delta \phi) - \delta (\partial_\mu \phi)) \right\}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \partial_\nu \phi' &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \cdot \partial_\nu (\phi + \delta \phi) = (\eta^\mu_\nu - \partial_\nu \xi^\mu) \partial_\mu (\phi + \delta \phi) \\ &= \partial_\nu \phi - \underbrace{\partial_\nu \xi^\mu \cdot \partial_\mu \phi + \partial_\nu \delta \phi}_{\delta (\partial_\mu \phi)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \partial_\nu (\delta \phi) - \delta (\partial_\mu \phi) = \partial_\nu \xi^\mu \partial_\mu \phi$$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{S} = \int d^4x \cdot \left\{ \mathcal{L} \partial_\rho \xi^\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \cdot \partial_\nu \xi^\mu \partial_\mu \phi \right\}$$

$$= - \int d^4x \cdot \partial_\nu \xi^\mu \underbrace{\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \phi - \mathcal{L} \delta^\mu_\nu \right\}}_{T^\mu_\nu}$$

$$= \int d^4x \cdot \partial_\mu T^\mu_\nu \cdot \xi^\nu = 0 \quad \text{car } \xi^\nu \text{ constant dans un espace plat}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu T^\mu_\nu = 0}$$

Avec gravitation

On a

$$\mathcal{S} = \int d^4x \cdot \sqrt{g} \cdot \mathcal{L}(g^{\mu\nu}, \phi, \partial_\mu \phi)$$

et soit $\mathcal{L}$ l'ho infinitésimale

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

Il s'agit d'un diffeo qui doit laisser invariant la théorie si on prend en compte le changement de métrique

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &\rightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} - \partial^\nu \xi^\mu - \partial^\mu \xi^\nu \\ \Rightarrow \delta g^{\mu\nu} &= -\partial^\nu \xi^\mu - \partial^\mu \xi^\nu \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\delta g S &= \int d^d x \cdot \frac{\partial(\sqrt{g} \cdot \mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} \cdot \delta g^{\mu\nu} \\ &= - \int d^d x \cdot \frac{\partial(\sqrt{g} \cdot \mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} \cdot \partial^\mu \varepsilon^\nu\end{aligned}$$

) pas de facteur 2 car symétrique

Par ailleurs, on a que

$$\delta \varphi S' = \int d^d x \cdot \sqrt{g} \cdot \delta \varphi \mathcal{L} = - \int d^d x \cdot \partial^\mu \varepsilon^\nu T_{\mu\nu} \sqrt{g}$$

Comme on doit avoir $\delta S' = 0$, on a

$$\delta S' = \delta \varphi S' + \delta g S = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta g S = - \delta \varphi S'$$

$$\Leftrightarrow - \int d^d x \cdot \frac{\partial(\sqrt{g} \cdot \mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} \cdot \partial^\mu \varepsilon^\nu = \int d^d x \cdot T_{\mu\nu} \sqrt{g} \partial^\mu \varepsilon^\nu$$

$$\Rightarrow T_{\mu\nu} = - \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial(\sqrt{g} \cdot \mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}}$$

parfois défini avec un facteur 1/2 suppl.

Trace de $T^{\mu\nu}$ en CFT de dimension d

Pour une CFT, on a $\delta S' = 0$ pour n'importe quelle lfs conforme. En particulier, par une dilatation $\delta g_{\mu\nu} = \varepsilon g_{\mu\nu}$, on a

$$\delta S' = \int d^d x \cdot \frac{\partial(\sqrt{g} \cdot \mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} \cdot \delta g_{\mu\nu} = \int d^d x \cdot \sqrt{g} \cdot T^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow T^\alpha{}_\alpha = 0 \quad (*)$$

$T^{\mu\nu}$ en coordonnées complexes

En coordonnées $z, \bar{z}$, on a

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

et (*) devient

$$T^\alpha{}_\alpha = T^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = T^{z\bar{z}} + T^{\bar{z}z} = 0$$

et par symétrie, $T^{z\bar{z}} = T^{\bar{z}z}$

$$\Rightarrow T^{z\bar{z}} = T^{\bar{z}z} = 0$$

Par ailleurs, l'éq. de conservation conduit à

$$\partial_z T^{z\bar{z}} = 0 \quad ; \quad \partial_{\bar{z}} T^{\bar{z}z} = 0,$$

$$\Leftrightarrow \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad ; \quad \partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} T_{zz} = T_{zz}(z) = T(z) & \text{et une fonction holomorphe} \\ T_{\bar{z}\bar{z}} = T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = \bar{T}(\bar{z}) & \text{et une fonction antiholomorphe.} \end{cases}$$

II. COURANTS DE NOETHER (d=2)

Cherchons le courant de Noether associé aux lfs conformes. Soit la lfc conforme infinitésimale

$$\begin{cases} z' = z + \varepsilon(z) \\ \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\varepsilon}(\bar{z}). \end{cases} \rightarrow \text{correspond à un chgt de signature de Lorentz ou à} \\ \text{euclidien } (= t \rightarrow it)$$

Afin de trouver le courant conservé, il va falloir considérer $\varepsilon(z, \bar{z})$ et $\bar{\varepsilon}(z, \bar{z})$:

$$\begin{aligned} \delta S &\sim \int d^2\sigma \cdot T_{\alpha\beta} \cdot \delta g^{\alpha\beta} - \int d^2\sigma \cdot T_{\alpha\beta} \partial^\alpha (\delta \sigma^\beta) \\ &\sim \int dz d\bar{z} \cdot \left\{ T_{zz} \cdot \partial^z \delta z + T_{\bar{z}\bar{z}} \cdot \partial^{\bar{z}} \delta \bar{z} \right\} \\ &\sim \int dz d\bar{z} \cdot \left\{ T_{zz} \cdot \partial_{\bar{z}} \varepsilon + T_{\bar{z}\bar{z}} \cdot \partial_z \bar{\varepsilon} \right\} \end{aligned}$$

On peut écrire

$$\begin{cases} \varepsilon(z, \bar{z}) = \varepsilon(z) + \bar{p}(\bar{z}) \\ \bar{\varepsilon}(z, \bar{z}) = \bar{\varepsilon}(\bar{z}) + p(z) \end{cases}$$

et donc

$$\delta S \sim \int dz d\bar{z} \cdot \left\{ T_{zz} \cdot \varepsilon \cdot \partial_{\bar{z}} \bar{p} + T_{\bar{z}\bar{z}} \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \partial_z p \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_{\bar{z}} J^{\bar{z}} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_z \bar{J}^z = 0$$

$$\Leftrightarrow J^{\bar{z}} = J^{\bar{z}}(z) \quad \text{et} \quad \bar{J}^z = \bar{J}^z(\bar{z})$$

et les courants conservés sont

$J(z) = T(z), \varepsilon(z)$	holomorphe
$\bar{J}(\bar{z}) = \bar{T}(\bar{z}), \bar{\varepsilon}(\bar{z})$	anti-holomorphe

A noter qu'il y a une infinité de courants conservés car cft à d=2.

VI. LES IDENTITES DE WARD

Les identités de Ward sont l'équivalent quantique du théorème de Noether. Soit l'intégrale de chemin :

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S(\phi)}$$

Soit une symétrie de la théorie la tpe infinitésimale

$$\phi' = \phi + \varepsilon \delta\phi$$

anomalie
v si D varie

laisse l'action et la mesure invariante. Considérons ε qui dépend des coord. $\varepsilon(\sigma)$. Dans ce cas, il n'y a plus d'invariance de la mesure où l'action

$$\begin{aligned} Z &\rightarrow \int \mathcal{D}\phi' \, e^{-S(\phi')} = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S(\phi) - \frac{1}{2\pi} \int J^\alpha \partial_\alpha \varepsilon} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S(\phi)} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int J^\alpha \partial_\alpha \varepsilon \right) \end{aligned}$$

où $\int = \int d^2\sigma \cdot \sqrt{g}$. A noter que le courant J^α peut également avoir des contributions dû au changement de mesure et au changement de l'action. Comme il s'agit d'un changement de variable d'intégration ϕ , l'expression de Z ne devrait pas changer sous la tpe et

$$\delta Z \sim \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S(\phi)} \int J^\alpha \partial_\alpha \varepsilon = 0 \quad \forall \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\langle \partial_\alpha J^\alpha \rangle = 0}$$

→ la valeur moyenne dans le vide de la divergence du courant doit être nulle.

Regardons ce qu'il se passe avec des insertions d'opérateurs dans l'intégrale de chemin :

$$\langle \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S(\phi)} \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n)$$

On peut voir ça comme des opérateurs que l'on aurait inséré à des points particuliers de l'espace-temps :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathcal{O}_1(\sigma_1) & & \\ \hline \times & \mathcal{O}_2(\sigma_2) & \times \\ \hline & \times & \\ \hline & & \times \\ \hline \end{array}$$

Les opérateurs $\mathcal{O}_i$ peuvent être n'importe quelle expression composée des champs ϕ . Sous la symétrie considérée précédemment, les opérateurs vont se tpe la

$$\mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{O}_i + \varepsilon \delta \mathcal{O}_i$$

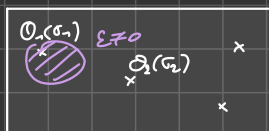
et on considère $\varepsilon \rightarrow \varepsilon(\sigma)$. Si on choisit $\varepsilon(\sigma)$ la son support est en dehors des insertions, on a

$$\delta \mathcal{O}_i(\sigma_i) = 0$$

et donc on trouve

$$\langle \partial_\alpha J^\alpha(\sigma), \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \rangle = 0 \quad \forall \sigma \neq \sigma_i \quad \Leftrightarrow \partial_\alpha J^\alpha = 0 \quad \forall \sigma \neq \sigma_i$$

Si les insertions sont au même endroit que T^α , ie si $\sigma \rightarrow \sigma'$, on prend ε qui a un support dans une région qui inclut σ la



et on trouve

$$\langle O_1(\sigma_1) \dots O_n(\sigma_n) \rangle \rightarrow \frac{1}{2} \int d\phi e^{-\mathcal{J}(\phi)} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int T^\alpha \partial_\alpha \varepsilon \right) (O_1 + \varepsilon \delta O_1) O_2 \dots O_n$$

$$\Rightarrow \langle \delta O_1(\sigma_1) \dots O_n(\sigma_n) \rangle = -\frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon \partial_\alpha \langle T^\alpha(\sigma) O_1(\sigma_1) \dots \rangle \quad \text{ich de Ward}$$

où l'intégrale est sur la région où $\varepsilon \neq 0$.

VII. CHAMPS PRIMAIRES

Champ primaire

Un champ primaire est un champ qui se transforme comme

$$\phi'(w, \bar{w}) = \left(\frac{dw}{dz} \right)^{-h} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \right)^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z}) \quad (2)$$

sur une lfs conforme locale $z \rightarrow w(z)$

On appelle h la dimension conforme holomorphe et $\bar{h}$ la dimension conforme anti-holomorphe.

$\hookrightarrow$ ce sont les poids conformes.

On les relie au comportement du champ sous rotation et dilatation :

$$h = \frac{1}{2}(\Delta + s) \quad \text{et} \quad \bar{h} = \frac{1}{2}(\Delta - s)$$

où Δ est la dimension d'échelle et s le spin du champ.

Champ quasi-primaire

C'est un champ qui se lfs comme un champ primaire, mais sous les lfs conformes globales $SL(2, \mathbb{C})$.

$\rightarrow$ tous les champs primaires sont quasi-primaires, mais pas inversement.

Champ primaire chiral

Champ de poids : $(h, 0)$

Champ primaire anti-chiral

Champ de poids : $(0, \bar{h})$.

Une définition équivalente d'un champ primaire est un champ qui se transforme sous une hfo conforme infinitésimale L_η

$$\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} \varphi = -(\eta \varphi \partial_z \varepsilon + \varepsilon \partial_z \varphi) - (\bar{\eta} \varphi \partial_{\bar{z}} \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon} \partial_{\bar{z}} \varphi)$$

VIII. IDENTITÉS DE WARD HOLOMORPHES

Les id. de Ward associées à l'invariance sous les hfo conformes sont

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle T_{\mu\nu}(x) X \rangle = - \sum_{i=1}^n \delta(x-x_i) \frac{\partial}{\partial x_i^\nu} \langle X \rangle$$

translations

$$\varepsilon_{\mu\nu} \langle T^{\mu\nu}(x) X \rangle = -i \sum_{i=1}^n s_i \delta(x-x_i) \langle X \rangle$$

rotations

$$\langle T_{\mu\nu}(x) X \rangle = - \sum_{i=1}^n \delta(x-x_i) \Delta_i \langle X \rangle$$

hfo d'échelle

où X est une collection de champs primaires, $s_i \varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\nu\mu}$ le générateur de spin ($\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$ et s_i le spin du champ) et Δ_i la dimension d'échelle.

A partir de ça, on peut mg (TP5)

$$\langle T(z) X \rangle = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial w_i \langle X \rangle}{z - w_i} + \frac{\bar{h}_i \langle X \rangle}{(z - w_i)^2} \right) + \text{termes réguliers}$$

$$\langle \bar{T}(\bar{z}) X \rangle = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{w}_i \langle X \rangle}{\bar{z} - \bar{w}_i} + \frac{\bar{\bar{h}}_i \langle X \rangle}{(\bar{z} - \bar{w}_i)^2} \right) + \text{termes réguliers}$$

où $x_i = (w_i, \bar{w}_i)$ et les termes réguliers sont des fctrs holomorphes (anti-h) de z ($\bar{z}$) régulier en $\bar{z} = w_i$ ($\bar{z} = \bar{w}_i$).

IX. IDENTITÉS DE WARD CONFORMES

Les 3 id. de Ward holomorphes peuvent se réexprimer comme

$$\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} \langle X \rangle = \int_{\mathcal{U}} d^2x \partial_\mu \langle T^{\mu\nu}(x) \varepsilon_\nu(x) X \rangle$$

où on intègre sur un domaine $\mathcal{U}$ qui contient tous les champs X et on considère une hfo conforme locale.

En utilisant le thm de Stokes dans le plan complexe, on obtient

$$\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} \langle X \rangle = \frac{1}{2} i \int_{\partial \mathcal{U}} \left(\langle -T^{\bar{z}\bar{z}} \varepsilon_{\bar{z}} X \rangle d\bar{z} + \langle T^{zz} \varepsilon_z X \rangle dz \right)$$

car $\int_{\partial D} \left(\langle T^{\bar{z}z} \xi_z X \rangle dz + \langle T^{z\bar{z}} \xi_{\bar{z}} X \rangle d\bar{z} \right) = 0$ car le contour ∂D ne passe pas par les z_i .

Enfin, en utilisant les définitions de $T(z)$ et $\bar{T}(\bar{z})$ et $\xi = \xi^z$; $\bar{\xi} = \xi^{\bar{z}}$, on trouve

$$\delta_{\xi, \bar{\xi}} \langle X \rangle = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} dz. \xi(z) \langle T(z) X \rangle + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} d\bar{z}. \bar{\xi}(\bar{z}) \langle \bar{T}(\bar{z}) X \rangle$$

où $\mathcal{C}$ est un contour orienté dans le sens trigonétrique et incluant les points $(z_i, \bar{z}_i)$.

X. OPERATOR PRODUCT EXPANSION : OPE

Commençons par décrire ce que l'on entend par opérateur local en CFT. On appellera aussi ces objets des champs. Il y a une différence de terminologie entre CFT et QFT. En QFT, le terme champ $\equiv$ objets ϕ qui apparaissent dans l'action et l'intégrale de chemin. En CFT, le désigne n'importe quelle expression locale, incluant ϕ , $\partial_\mu \phi$ ou $e^{i\phi}$.

L'ensemble de tous les champs est infini en CFT même si, en travaillant avec une QFT, on ne considérerait qu'un nombre fini de champs fondamentaux ϕ .

On définit l'expansion d'un produit d'opérateurs (OPE)

$$\mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(w, \bar{w}) = \sum_k C_{ij}^k(z-w, \bar{z}-\bar{w}) \mathcal{O}_k(w, \bar{w})$$

avec $\mathcal{O}_i$ les opérateurs locaux de la CFT et C_{ij}^k une fct qui dépend de la distance entre les 2 opérateurs.

L'expression de l'OPE doit être toujours considérée par des opérateurs qui se trouvent dans des fcts de corrélations, ie

$$\langle \mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(w, \bar{w}) \dots \rangle = \sum_k C_{ij}^k(z-w, \bar{z}-\bar{w}) \langle \mathcal{O}_k(w, \bar{w}) \dots \rangle$$

Par facilité, on ne notera plus le $\langle \dots \rangle$, il sera toujours implicite.

L'idée principale derrière ces OPE est d'effectuer un développement en série lorsque 2 opérateurs s'approchent l'un de l'autre. Autrement dit, quand 2 opérateurs sont définis en des points proches l'un de l'autre, on peut développer en série leur produit autour d'un de ces 2 pts.

Remarques

- Les fonctions de corrélation seront toujours supposées être ordonnées. Par conséquent, les opérateurs apparaissant dans les OPE commutent.

$$\mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(w, \bar{w}) = \mathcal{O}_j(w, \bar{w}) \mathcal{O}_i(z, \bar{z})$$

(si Grassmann, ils anti-commutent).

- Les OPE ont un comportement singulier en $z \rightarrow w$. On verra que c'est ce qui va nous intéresser. En effet, les OPE permettent de mettre en évidence les résidus à travers les développements en série facilitant l'identification des termes des résidus.
- Les autres insertions dans la fct de corrélation " $\dots$ " sont arbitraires MAIS doivent être à une distance $> |z-w|$. En fait, les OPE sont exactes et on a un rayon de convergence $\equiv$ à la distance de la plus proche autre insertion.

XI. EXEMPLE : CHAMP SCALAIRE LIBRE

Soit un boson sans masse

car un terme de masse
compromettrait l'invariance
conforme.

$$S = \frac{g}{2} \int d^2x \cdot \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi.$$

On a vu au TP6 que

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle = -\frac{1}{4\pi g} \ln((x-y)^2).$$

En coordonnées complexes, on a

$$\langle \varphi(z, \bar{z}) \varphi(w, \bar{w}) \rangle = -\frac{1}{4\pi g} \left(\ln(\bar{z}-\bar{w}) + \ln(z-w) \right).$$

En dérivant, on trouve

$$\langle \partial_z \varphi(z, \bar{z}) \cdot \partial_w \varphi(w, \bar{w}) \rangle = \partial_w \left(-\frac{1}{4\pi g} \cdot \frac{1}{z-w} \right) = -\frac{1}{4\pi g} \frac{1}{(z-w)^2},$$

$$\langle \partial_{\bar{z}} \varphi(z, \bar{z}) \cdot \partial_{\bar{w}} \varphi(w, \bar{w}) \rangle = -\frac{1}{4\pi g} \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})^2}.$$

Ensuite, on peut mg

$$T(z) = -2\pi T_{zz} = -2\pi g : \partial \varphi(z) \partial \varphi(z) :$$

mg

$$\langle T(z) \rangle = 0.$$

Si on évalue $\langle T(z) \varphi(w) \rangle$, on trouve

$$\langle T(z) \partial \varphi(w) \rangle = \frac{\partial \varphi(z)}{(z-w)^2} = \frac{\partial \varphi(w)}{(z-w)^2} + (z-w) \frac{\partial_w (\partial \varphi(w))}{(z-w)^2},$$

$$\Rightarrow \partial \varphi \text{ est un champ primaire de poids } (1, 0)$$

De manière analogue, $\bar{\partial} \varphi$ est un champ primaire de poids $(0, 1)$.

De manière générale,

$$\partial^m \varphi \text{ est de poids } (m, 0) ; \quad \bar{\partial}^n \varphi \text{ est de poids } (0, n)$$

On peut également mg pour le champ scalaire

$$\langle T(z) T(w) \rangle \sim \frac{1/g}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}.$$

A cause du 1^{er} terme, le tenseur énergie-impulsion n'est pas un champ primaire.

De manière générale,

$$\langle T(z) T(w) \rangle \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}$$

avec c la charge centrale h_0

$$c = \begin{cases} 1 & \text{pour les bosons} \\ 1/2 & \text{pour les fermions} \\ -2 & \text{pour les 2 ghosts (cf BRST)} \\ -26 & \end{cases}$$

m scalaires libres : $c = m$
 m fermions libres : $c = m/2$

La charge centrale est une mesure extensive du nombre de ddl du système. Si $c=0$, $T(z)$ serait un champ primaire de poids $(0,0)$.

En fait, $T(z)$ est un champ quasi-primaire et se transforme sous $z \rightarrow w(z)$ comme

$$T(z) \rightarrow T'(w) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-2} \left(T(z) - \frac{c}{12} \{w, z\}\right)$$

où $\{w, z\}$ est la dérivée schwartzienne définie comme

$$\{w, z\} = \frac{d^3w/dz^3}{dw/dz} - \frac{3}{2} \frac{d^2w/dz^2}{dw/dz}$$

La dérivée schw. est le seul terme qui peut être ajouté à la loi de transformation de $T(z)$ h_0

$$T(z) \xrightarrow{z \rightarrow u} T'(w) \xrightarrow{w \rightarrow v} T''(v) \quad (\text{propriété de groupe})$$

et qui s'annule par les transformations globales.

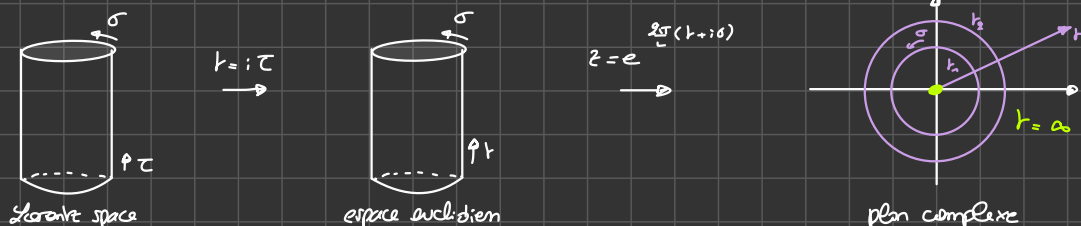
XII. QUANTIFICATION RADIALE

Jusqu'à présent, on a parlé d'opérateurs mais pas des états sur lesquels ils agissent. Cela va pouvoir se faire à l'aide de la quantification radiale.

Soit une corde fermée dans un espace de Minkowski. La worldsheet est un cylindre, décrit par une composante spatiale σ et une temporelle τ . On prend un cylindre de périmètre L . À l'aide d'une rotation de Wick $t = i\tau$ et d'une transformation conforme

$$z = e^{\frac{2\pi i}{L}(\tau + i\sigma)}$$

il est possible de ramener la théorie dans le plan complexe.



On voit donc que, pour ordonner des opérateurs dans le temps, il faut les placer à des distances différentes de l'origine "radial ordering" :

$$R(\phi(z)\phi(w)) = \begin{cases} \phi(z)\phi(w) & \text{si } |z| > |w| \\ \phi(w)\phi(z) & \text{si } |w| > |z|. \end{cases}$$

Par ailleurs, la quantification radiale permet de lire les commutateurs et des intégrales de contour. En effet, soient 2 opérateurs A et B , des intégrales de contour de fonctions holomorphes :

$$A = \oint dz a(z) \quad ; \quad B = \oint d\omega b(\omega).$$

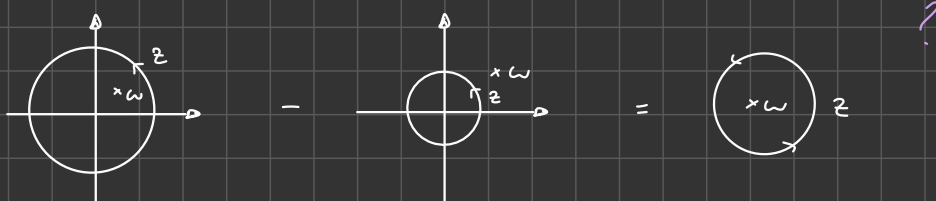
leur commutateur vaut

$$[A, B] = \left(\oint dz \oint d\omega - \oint d\omega \oint dz \right) a(z) b(\omega).$$

On se rappelle que les opérateurs apparaissent toujours dans des fct de corrélation avec des times ordering ie ici du radical ordering on a donc



L'autre est de d'abord fixer ω et intégrer z puis intégrer sur ω :



$$\Rightarrow [A, B] = \oint_0 d\omega \oint_{\omega} dz \cdot a(z) b(\omega)$$

Exemple (TP7)

La charge conservée associée aux hfs conformes infinitésimales est

$$Q_\varepsilon = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon} dz \cdot T(z) \varepsilon(z)$$

et donc

$$[Q_\varepsilon, \Phi(\omega)] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon} dz \cdot \varepsilon(z) \langle T(z) \Phi(\omega) \rangle = - \delta_\varepsilon \Phi(\omega)$$

XIII. FONCTIONS DE CORRÉLATION

Dans cette quantification radicale, on va voir que la CFT impose des conditions strictes sur la forme des fonctions de corrélation.

Supposons l'existence d'un état $|0\rangle$ sur lequel vont agir les opérateurs de création pour construire un espace de Hilbert. Afin de considérer des interactions en 1 point, on doit définir un état asymptotique :

$$|\varphi_{in}\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \varphi(z, \bar{z}) |0\rangle.$$

On définit alors $\langle \varphi_{out} | = |\varphi_{in}\rangle^\dagger$ où la conjugaison hermitienne est définie sur des champs conformes via

$$\varphi^\dagger(z, \bar{z}) = \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \varphi(1/\bar{z}, 1/z)$$

défini sur la surface réelle $\bar{z} = z^*$

Les arguments du champ φ vont de z à $1/\bar{z}$ et $\bar{z}$. Cela est dû au fait que l'on a fait une rotation de Wick et les z et $\bar{z}$ cyclent. Les préfacteurs permettent d'avoir un comportement régulier pour le produit scalaire

$$\langle \varphi_{out} | \varphi_{in} \rangle.$$

Pour le prouver, regardons la 2-point fonction du l'opérateur primaire $\varphi(z, \bar{z})$.

Par invariance par translation, on a

$$\langle \varphi(z_1, \bar{z}_1) \varphi(z_2, \bar{z}_2) \rangle = f(z_1 - z_2, \bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

Par invariance par dilatation ($z \rightarrow \lambda z, \bar{z} \rightarrow \lambda \bar{z}$), on a

$$\langle \varphi(z_1, \bar{z}_1) \varphi(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \left(\frac{dz'}{dz} \right)^h \bigg|_{z_1} \left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}} \right)^{\bar{h}} \bigg|_{\bar{z}_1} \left(\frac{dz'}{dz} \right)^h \bigg|_{z_2} \left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}} \right)^{\bar{h}} \bigg|_{\bar{z}_2} \langle \varphi(z'_1, \bar{z}'_1) \varphi(z'_2, \bar{z}'_2) \rangle$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \varphi(z_1) \varphi(z_2) \rangle &= \lambda^{2h} \tilde{\lambda}^{2\bar{h}} \langle \varphi(z'_1, \bar{z}'_1) \varphi(z'_2, \bar{z}'_2) \rangle \\ &= \lambda^{2h} \tilde{\lambda}^{2\bar{h}} f(\lambda(z_1 - z_2), \tilde{\lambda}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(z_1 - z_2, \bar{z}_1 - \bar{z}_2) = \frac{C_{12}}{(z_1 - z_2)^{2h} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\bar{h}}}.$$

Par conséquent,

$$\langle \varphi(z_1, \bar{z}_1) \varphi(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{C_{12}}{(z_1 - z_2)^{2h} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\bar{h}}}.$$

De là, on voit facilement que $\langle \varphi_{out} | \varphi_{in} \rangle$ est bien défini :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{out} | \varphi_{in} \rangle &= \lim_{\substack{z, \bar{z}, w, \bar{w} \\ \rightarrow 0}} \langle 0 | \varphi^\dagger(z, \bar{z}) \varphi(w, \bar{w}) | 0 \rangle \\ &= \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \langle 0 | \varphi(1/\bar{z}, 1/z) \varphi(w, \bar{w}) | 0 \rangle \\ &= \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \langle 0 | \varphi(1/\bar{z}, 1/z) \varphi(0, 0) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Soit $\xi = \frac{1}{z}$. Alors

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{out} | \varphi_{in} \rangle &= \lim_{\xi, \bar{\xi} \rightarrow 0} \xi^{2h} \bar{\xi}^{2\bar{h}} \langle 0 | \varphi(\bar{\xi}, \xi) \varphi(0, 0) | 0 \rangle \\ &= \lim_{\xi, \bar{\xi} \rightarrow 0} C_{12} \cdot \frac{\xi^{2h} \bar{\xi}^{2\bar{h}}}{\xi^{2h} \bar{\xi}^{2\bar{h}}} = C_{12}. \quad \text{OK} \end{aligned}$$

Enfin, on peut faire une expansion en série de Taylor d'un champ primaire de poids $(h, \bar{h})$:

$$\varphi(z, \bar{z}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-m-h} \bar{z}^{-n-\bar{h}} \varphi_{m,n}$$

$$\text{où } \varphi_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \cdot z^{m+h-1} \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \cdot \bar{z}^{n+\bar{h}-1} \varphi(z, \bar{z}) \quad \text{et} \quad \varphi_{m,n}^+ = \varphi_{-m,-n}.$$

XIV. ALGÈBRE DE VIRASORO

Développons en série de Laurent la tenseur énergie-impulsion :

$$\begin{cases} T(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}} \\ \bar{T}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{L}_n}{\bar{z}^{n+2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \cdot z^{n+1} \cdot T(z) \\ \bar{L}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \cdot \bar{z}^{n+1} \cdot \bar{T}(\bar{z}) \end{cases}$$

On voit que L_n est la charge conservée associée à la hfs conforme

$$\begin{cases} \delta z = \xi(z) = z^{n+1} \\ \delta \bar{z} = \bar{\xi}(\bar{z}) = \bar{z}^{n+1} \end{cases}$$

Je peux l'intégrale de contour se fait autour d'une tranche spéciale du cylindre. Cela signifie que L_n est la charge conservée ie est constant lors de l'évolution dans le temps et le cylindre ou sous évolution radiale dans le plan complexe.

Lorsqu'on s'intéresse à une théorie quantique, les charges conservées deviennent les générateurs des hfs. Donc les opérateurs L_n et $\bar{L}_n$ génèrent les hfs conformes

$$\delta z = z^{n+1} \quad \text{et} \quad \delta \bar{z} = \bar{z}^{n+1}$$

→ ce sont les générateurs de Virasoro.

En particulier,

- L_{-1} et $\bar{L}_{-1}$ génèrent les translations dans le plan
- L_0 et $\bar{L}_0$ les rotations et les dilatations.

Par ailleurs, l'hamiltonien génère les translations dans le temps et donc correspond à l'eq. de dilatations :

$$H \propto L_0 + \bar{L}_0.$$

Relation de commutation

Calculons le commutateur $[L_m, L_n]$:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \left(\oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} - \oint \frac{dw}{2\pi i} \oint \frac{dz}{2\pi i} \right) z^{m+1} w^{n+1} T(z)T(w) \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \oint_w \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} w^{n+1} T(z)T(w) \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \cdot \text{Res} \left[z^{m+1} w^{n+1} \left(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \text{reg. t.} \right) \right] \end{aligned}$$

Pour calculer le r sidu, on fait un d v. de Taylor de z^{m+1} autour de w

$$z^{m+1} = w^{m+1} + (m+1)w^m(z-w) + \frac{1}{2}m(m+1)w^{m-1}(z-w)^2 + \frac{1}{6}m(m+1)w^{m-2}(z-w)^3 + \dots$$

et donc

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \cdot w^{m+1} \left[\frac{c}{12} \cdot m(m+1)w^{m-2} + (m+1)w^m 2T(w) + \partial T(w)w^{m+1} \right] \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \left[\underbrace{\frac{c}{12} m(m+1)w^{m+m-2}}_{\text{pole}} + \underbrace{(m+1)2T(w)w^{m+m+1}}_{w^{m+m-1-2}} + \underbrace{\partial T(w)w^{m+m+1}}_{w^{m+m-1-2}} \right] \\ T(z) &= \sum z^{-n-2} L_n \\ &= 2(m+1)L_{m+n} + \oint \frac{dw}{2\pi i} \sum_k (-k-2)w^{-k-3} L_k w^{m+m+2} + \frac{c}{12} m(m+1)\delta_{m+n,0} \\ &= 2(m+1)L_{m+n} + (-m-m-2)L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m+1)\delta_{m+n,0} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m+1)\delta_{m+n,0} \quad \text{alg. de Virasoro}$$

Le second terme commute avec toute l'algèbre : c'est une charge centrale.

De même,

$$[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{\tilde{c}}{12} m(m+1)\delta_{m+n,0}$$

et $[L_m, \bar{L}_n] = 0$.

On remarque que l'alg. de Virasoro possède une sous-algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$: $\{L_0, L_{-1}, L_1\}$.

Algèbre de Witt vs Virasoro

Les lfs de coordonnées (diffes) sont générés par les opérateurs

$$L_m = z^{m+1} \partial_z \quad ; \quad \bar{L}_m = \bar{z}^{m+1} \partial_{\bar{z}}$$

$$\text{où } [L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} \text{ (alg. de Witt).}$$

C'est la première partie de l'alg. de Virasoro. En ce qui concerne le terme de charge centrale, on se rappelle qu'une lfc conforme n'est pas qu'une reparamétrisation, mais est accompagnée d'une lfc de Weyl. Le second terme est donc dû à cette lfc de Weyl.

XV. ESPACE DE HILBERT DE LA QUANTIFICATION RADIALE

Soit l'état du vide $|0\rangle$. On impose qu'il soit invariant sous les lfs conformes globales, i.e. est annihilé par sous-algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (L_0, L_{-1}, L_1). De plus, on veut que $|0\rangle$ est annihilé par $L_m, m > 0$. Au final, on a

$$L_m |0\rangle = 0 \quad ; \quad \bar{L}_m |0\rangle = 0 \quad \forall m > 0.$$

Ensuite, on peut définir

$$|h, \bar{h}\rangle = \phi(0,0) |0\rangle$$

où $\phi(0,0)$ est un champ primaire de poids $(h, \bar{h})$. On peut imag. de tels champs qui agissent sur un état du vide crée un état propre de l'hamiltonien (T_{xx}). En effet, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0 |h, \bar{h}\rangle = h |h, \bar{h}\rangle \quad \text{et} \quad \bar{L}_0 |h, \bar{h}\rangle = \bar{h} |h, \bar{h}\rangle \\ L_m |h, \bar{h}\rangle = \bar{L}_m |h, \bar{h}\rangle = 0 \quad \forall m > 0 \end{array} \right.$$

on a donc

$$H |h, \bar{h}\rangle = (h + \bar{h}) |h, \bar{h}\rangle.$$

Enfin, si on développe le champ en série de Laurent, on a

$$\phi(w, \bar{w}) = \sum_m \sum_n w^{-m-h} \bar{w}^{-n-\bar{h}} \phi_{m,n},$$

on a

$$[L_h, \phi_{m,n}] = (h(h-1) - m) \phi_{m+h,n}$$

$$[\bar{L}_{\bar{h}}, \phi_{m,n}] = (\bar{h}(\bar{h}-1) - n) \phi_{m,n+\bar{h}}$$

Par conséquent, $\phi_{m,n}$ sont des op. d'échelle pour les états propres de L_0 .

$$L_0 \phi_{m,n} |h, \bar{h}\rangle = (h-m) \phi_{m,n} |h, \bar{h}\rangle$$

$$\bar{L}_0 \phi_{m,n} |h, \bar{h}\rangle = (\bar{h}-n) \phi_{m,n} |h, \bar{h}\rangle$$

En conclusion, $|h, \bar{h}\rangle$ est un état propre de l'hamiltonien généré par un champ primaire. De plus, il s'agit de l'état avec la plus basse r.p. ou, en théorie des groupes, l'état de p.h.p. En partant de cet état de p.h.p., on peut générer des états descendants

on agit avec les générateurs de Virasoro $L_m, \bar{L}_m$ ($m, n > 0$) :

$$L_{-n_1} \dots L_{-n_r} \bar{L}_{-\bar{n}_1} \dots \bar{L}_{-\bar{n}_m} |h, \bar{h}\rangle,$$

états de poids $(h', \bar{h}') = (h + n_1 + \dots + n_r, \bar{h} + \bar{n}_1 + \dots + \bar{n}_m) = |h + N, \bar{h} + \bar{N}\rangle$, où N et $\bar{N}$ sont les niveaux de l'état descendant. Un ensemble d'états $|h\rangle$ ($|\bar{h}\rangle$) est formé sous l'action des générateurs de Virasoro et donc, forment une rep. de l'alg. de Virasoro. Un tel ensemble est appelé un module de Verma. Il dépend de 2 quantités : h et c ($\bar{h}$ et $\bar{c}$).

XVI. (CHARGE CENTRALE ET POURQUOI D=26 (aller check mes notes du TP8 pour + d'infos))

On a vu que pour avoir l'invariance de Lorentz, il faut que la théorie des cordes soit sur une surface à $d=26$, correspondant à 26 degrés de liberté qui localisent la corde dans l'espace.

On se rappelle que la spectre de masse pour les cordes fermées est la

- au niveau 1 : particule sans masse avec spin 2 $\rightarrow$ graviton

Les gravitons proviennent des excitations de la corde fermée et vont construire une métrique $g_{\mu\nu}$.

En commençant par l'action de Polyakov dans un espace plat, la théorie des cordes se plonge dans un espace-temps dynamique. Elle devient une théorie d'interactions et l'invariance conforme à 1-boucle $\Rightarrow$ les eqs. d'Einstein.

Regardons ce que l'invariance conforme implique sur la worldsheet. La symétrie conforme a une symétrie de jauge résiduelle et ne doit donc pas être brisée dans la théorie quantique. Si elle l'est, la théorie comporte une anomalie : des configurations reliées par des lfs de jauge ne sont plus physiquement équivalentes.

L'invariance conforme se résume à l'existence d'un tenseur énergie-impulsion sans trace. On peut mg dans une théorie quantique

$$\langle T^{\mu}_{\mu}(x) \rangle = \frac{c}{24\pi} R(x)$$

avec R la courbure scalaire sur la worldsheet.

$\rightarrow$ anomalie de Weyl / conforme

Comme on a choisi la jauge conforme (où la worldsheet est plate) et on se demande donc si l'on doit se brasser de l'anomalie de Weyl. Oui! Sous une lfs de Weyl

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow \omega^2 g_{\alpha\beta}$$

et le scalaire de Ricci devient

$$R \rightarrow \omega^{-2} R - 2(D-1)g^{\alpha\beta}\omega^{-3}D_{\alpha}\omega - (D-1)(D-4)g^{\alpha\beta}\omega^{-4}D_{\alpha}\omega D_{\beta}\omega$$

où le choix de jauge ω apparaît explicitement : différents choix de jauge impactent directement un observable. Ainsi, on demande que la théorie ait une charge centrale totale $= 0$.

On a également vu que les états propres d'énergie d'un système invariant conforme habite dans des reps. de l'alg. de Virasoro.

On part de l'état de p.h.p. $|R\rangle$ défini par

$$L_0 |R\rangle = R |R\rangle \quad L_n |R\rangle = 0 \quad \forall n > 0.$$

On applique les générateurs de Virasoro de mode négatif sur cet état et on a une base pour les autres états de la rep.: les états descendants. On trouve le module de Verma généré par cet état

$$L_{-e_1} \dots L_{-e_n} |R\rangle \quad 1 \leq e_1 \leq \dots \leq e_n = R+N.$$

Le module de Verma dépend de h et c . Une rep. de l'alg. de Virasoro sera unitaire si elle ne contient pas d'état de norme négative (ghost). Comme $L_n^\dagger = L_{-n}$, le produit scalaire est

$$\langle R | L_{e_n} \dots L_{e_1} L_{-e_1} \dots L_{-e_n} | R \rangle$$

et peut être utilisé pour calculer la norme d'un état. On a

$$\begin{aligned} \langle R | L_n L_{-n} | R \rangle &= \langle R | (L_{-n} L_n + 2n L_0 + \frac{c}{12} n(n^2-1)) | R \rangle \\ &= \left(2nR + \frac{c}{12} n(n^2-1) \right) \langle R | R \rangle. \end{aligned}$$

L'unitarité impose 2 contraintes :

- si $c < 0$: la norme devient négative pour n grand.

Les bases des reps avec $c < 0$ ne sont pas unitaires

Ainsi, prendre $m = 1$ mq un poids conforme négatif $\Rightarrow$ violation de l'unitarité.

$\Rightarrow$ unitarité requiert $h \geq 0$ et $c \geq 0$ (condition nécessaire seulement)

- si $c = 0$: la théorie est triviale, elle ne contient pas d'états excités.

Ainsi, l'anomalie de Weyl dit de supprimer la charge centrale, mais une théorie avec $c = 0$ est triviale...

La quantification covariante de l'action d'une corde requiert l'intro d'un système de jauge via la méthode de Faddeev-Popov de fixation de jauge.

Pour ces jaugeurs β et c , les opé. du tenseur énergie-impulsion entraînent une charge centrale $c = -26$. On a également vu que l'exemple le plus simple de CFT, le boson libre vient avec $c = 1$.

$\rightarrow$ la façon la plus simple d'avoir l'annulation de l'anomalie de Weyl est d'avoir une théorie avec 26 bosons et 26 fermions par la corde dans la target space.

La consistance de la théorie prédit le nombre de dimensions de l'espace-temps: c'est qq chose d'unique que GR ou CFT ne peuvent pas prédire.

$\rightarrow$ on finit avec 2 CFT découplées : théorie des cordes et ghost CFT, découplées des processus physiques et dont la non-unitarité n'a donc pas d'i

XVII. CORRESPONDANCE OPÉRATEUR - ÉTAT

Dans une QFT, les états et les opérateurs locaux sont des objets bien différents. En effet, les opérateurs locaux sont définis en des points précis de l'espace-temps, alors qu'un état se répartit sur tout l'espace-temps. Cela devient plus clair si on parle en terme de fonction d'onde de type Schrödinger.

En QFT, ces objets sont des fonctionnelles d'onde $\Psi(\phi(\sigma))$ qui décrivent la proba de chaque config du champ $\phi(\sigma)$ en chaque point σ de l'espace à temps fini.

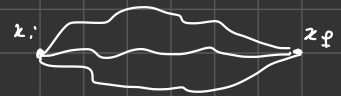
Bien que les états et les op. locaux sont des objets $\neq$, $\exists$ un isomorphisme entre les 2 en CFT. La correspondance op. - état. L'idée est que les événements loin dans le passé sur un cylindre se retrouvent en $z=0$ dans le plan complexe. Par conséquent, définir un état sur le cylindre dans le passé lointain $\equiv$ à définir une perturbation locale à l'origine du plan complexe.

Plus précisément, regardons les fonctions / fonctionnelles d'onde en MQ, en QFT, puis en CFT et l'intégrale de chemin :

• En MQ

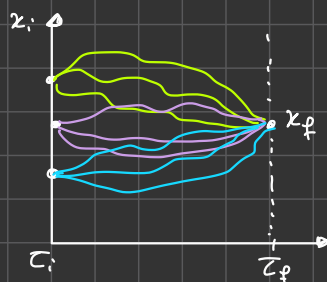
Le propagateur pour une particule qui se déplace entre (x_i, τ_i) et (x_f, τ_f) est donné par

$$G(x_f, \tau_f; x_i, \tau_i) = \int_{x(\tau_i)=x_i}^{x(\tau_f)=x_f} \mathcal{D}x \cdot e^{iS[x]}$$



Par conséquent, pour un système qui a pour état initial $\Psi_i(x_i)$ en τ_i , il évoluera la

$$\Psi_f(x_f, \tau_f) = \int dx_i \cdot G(x_f, \tau_f; x_i, \tau_i) \Psi_i(x_i, \tau_i)$$



Il y a 2 choses à retenir :

- Pour évaluer les fonctions d'onde en x_f , on évalue uniquement les intégrales de chemin avec comme condition finale

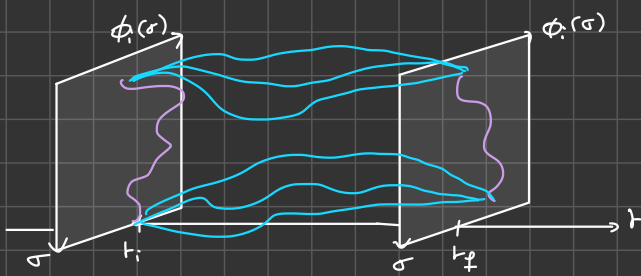
$$x(\tau_f) = x_f.$$

- L'état initial $\Psi(x_i)$ agit comme une fonction poids pour l'intégrale sur les τ_i .

• En QFT

On a à faire à des fonctionnelles. Le propagateur qui lie la configuration du champ $\phi(\sigma)$ en un temps t_i et ϕ_f en t_f est

$$K(\phi_i(\sigma), \phi_f(\sigma)) = \int_{\phi(\sigma, t_i) = \phi_i(\sigma)}^{\phi(\sigma, t_f) = \phi_f(\sigma)} \mathcal{D}\phi(\sigma, t) \cdot e^{iS[\phi]}$$



Par conséquent, un état initial $\mathcal{Z}_i[\phi_i(\sigma)]$ au temps τ_i va évoluer tq

$$\mathcal{Z}_f[\phi_f(\sigma), \tau_f] = \int \mathcal{D}\phi \int_{\phi_i}^{\phi_f} \mathcal{D}\phi \cdot e^{iS(\phi)} \mathcal{Z}_i[\phi_i(\sigma), \tau_i]$$

La déf. de fonctionnelle d'onde en QFT à partir de l'espace br/et se fait à comme en MQ :

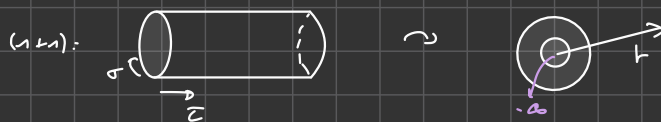
$$\mathcal{Z}[\phi(\sigma)] = \langle \mathcal{Z} | \phi(\sigma) \rangle$$

• En CFT

Pour le cas général des CFT en $d+1$, on l'on a utilisé la quantification radiale (en coord. euclidiennes), on a

$$\mathbb{R} \times S^d \sim \mathbb{R}^{d+1}$$

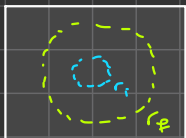
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 \rightsquigarrow ds^2 = f(\tilde{r}) (d\tilde{r}^2 + d\Omega^2)$$



Après quantification radiale, les états sont définis sur des cercles de rayons constants $|z| = r_i$. En terme d'intégrale de chemin, on intègre sur tous les champs avec comme condition aux frontières

$$\phi(r_i) = \phi_i \text{ et } \phi(r_f) = \phi_f$$

ie sur les bords des anneaux :



$$\mathcal{Z}_f[\phi_f(\sigma), r_f] = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \mathcal{D}\phi \cdot \int_{\text{CI}} \mathcal{D}\phi \cdot e^{-S(\phi)} \mathcal{Z}_i[\phi_i(\sigma), r_i]$$

$\downarrow$ CI $\downarrow$ weight of CI

On voit que l'effet de l'état initial est de changer le poids de l'intégrale de chemin sur le bord de l'anneau $|z| = r_i$.

Si on prend un état initial bien dans le passé ($z \rightarrow 0$), on doit intégrer sur un disque $|z| \leq r_f$ et plus sur un anneau. De plus, le seul effet de l'état initial est de changer le poids de l'int. de chemin en $z=0$.

→ chaque opérateur local $\mathcal{O}(z=0)$ définit un état de la théorie.

$$\mathcal{Z}[\phi_f, r] = \int \mathcal{D}\phi \cdot \int_{\phi_i}^{\phi_f} \mathcal{D}\phi \cdot e^{-S(\phi)} \mathcal{Z}_i[\phi_i(z=0), 0]$$

$\mathcal{O}(z=0)$

et ϕ_i est devenu un scalaire et $\mathcal{Z}_i$ un op. local en $z=0$

$$\mathcal{Z}[\phi_f, r] = \int_{\phi_i = \phi_f} \mathcal{D}\phi \cdot e^{-S(\phi)} \cdot \mathcal{O}(z=0)$$

→ ce qui était une fonctionnelle devient un op : op-state correspondance !

Remarques

- On a pris l'exemple de la CFT à $(d+1)$ -dim, mais cela est valable en CFT $(d+1)$ -dim. En QFT non-conforme, un op. local crée plusieurs états.
- La correspondance ne dit pas que le $\#$ op. = $\#$ états. Il s'agit d'une correspondance 1-à-1 avec les op. locaux.
- On pourrait croire que c'est similaire au cas de la quantification canonique d'un champ libre en QFT : on crée les états en agissant avec des ops de créations, mais ça n'a rien à voir. Les ϕ sont des lfs de Fourier d'ops locaux et donc leurs sont locaux.

Conséquences de cette correspondance

- 1) On a défini 2 objets que l'on a appelé primaire : des états et des ops. La correspondance fait le lien entre les 2. Soit l'état $|0\rangle$, construit en insérant un opérateur primaire ϕ dans l'intégrale de chemin en $z=0$. On a

$$\begin{aligned} L_n |0\rangle &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \cdot z^{n+1} T(z) \phi(z=0) \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \cdot z^{n+1} \left(\frac{\phi_0}{z^2} + \frac{\partial\phi}{z} + \dots \right) \end{aligned}$$

On peut se demander où l'intégrale de chemin intervient. Rappelons que ce genre d'expression d'opérateurs est lui pris à l'intérieur des fcts de corrélation implicitement et donc dans une intégrale de chemin.

En particulier,

- $L_{-1} |0\rangle = |0\rangle$: vrai $\forall$ op, même non primaire car L_{-1} est le générateur des translations
- $L_0 |0\rangle = h |0\rangle$: vrai $\forall$ op avec une lfo sous chgt d'échelle bien définie
- $L_n |0\rangle = 0 \quad \forall n > 0$: vrai que pour des ops primaires (c'est la condition par qu'un op soit primaire)

On comprend donc mieux pourquoi on s'intéressait aux spectres des poids des op. primaires. Il s'agit du spectre en énergie et moment angulaire de la théorie définie sur le cylindre.

- 2) On peut utiliser l'idée de la correspondance afin de comprendre pourquoi les OPE fonctionnent si bien en CFT. Supposons que l'on soit intéressé par une fct de corrélation avec des insertions d'opérateurs :



Les OPE nous permettent de remplacer les 2 opérateurs à l'intérieur du cercle par une somme d'ops en $z=0$, indépendamment de ce qu'il y a en dehors du cercle. Cela peut paraître étonnant pour des ops, mais cela vient du fait que l'on calcule l'intégrale de chemin jusqu'au cercle ponctuel sur lequel l'effet des 2 ops est de déterminer l'état que l'on a. Cela nous donne une façon de comprendre pq les OPE sont exacts en CFT, avec un rayon de convergence qui vaut la distance à laquelle se trouve la prochaine insertion.

XVIII. EXEMPLE: CHAMP SCALAIRE LIBRE

Illustrons cette correspondance état-opérateurs avec le champ scalaire.

Sur un cylindre euclidien, on a

$$X(\omega, \bar{\omega}) = x + \alpha' p \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \cdot \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n e^{in\omega} + \tilde{\alpha}_n e^{in\bar{\omega}})$$

où les conditions pour avoir un champ réel donne

$$\alpha_n^* = \alpha_{-n} \quad ; \quad \tilde{\alpha}_n^* = \tilde{\alpha}_{-n}.$$

On a vu que $X(\omega, \bar{\omega})$ n'est pas un champ primaire mais que $\partial_\omega X(\omega, \bar{\omega})$ l'est. On va donc travailler avec. Sur un cylindre, on a

$$\partial_\omega X(\omega, \bar{\omega}) = -\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \alpha_n e^{in\omega}$$

Avec $\alpha_0 = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p.$

Comme ∂X est un champ primaire de poids $h=1$, si l'on voit le plan complexe est $(z = e^{i\omega})$

$$\partial_z X(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial \omega} \right)^{-1} \partial_\omega X(\omega) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \frac{\alpha_n}{z^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \alpha_n = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n \cdot \partial X(z).$$

Grâce à l'OC $\partial X \partial X$, on déduit les relations de commutation

$$\begin{aligned} [\alpha_m, \alpha_n] &= -\frac{2}{\alpha'} \left[\oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{d\omega}{2\pi i} - \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \oint \frac{dz}{2\pi i} \right] z^m \omega^n \partial X(z) \partial X(\omega) \\ &= -\frac{2}{\alpha'} \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \operatorname{Res}_{z=\omega} \left[z^m \omega^n \left(\frac{-\alpha'/2}{(z-\omega)^2} + \dots \right) \right] \quad \downarrow \quad z^m = \omega^m + m\omega^{m-1}(z-\omega) \\ &= m \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \cdot \omega^{m+n-1} \\ &= m \cdot \delta_{m+n, 0}. \end{aligned}$$

→ on a bien les rel. de com. de la quantification canonique.

Intéressons-nous maintenant à la correspondance état-opérateurs. De la quantification canonique, l'espace de Fock est défini en agissant avec les ops $\alpha_{-m}, m>0$ sur $|0\rangle$, la

$$\alpha_m |0\rangle = 0.$$

Le mode $\alpha_0 \sim p$ va donner un autre nombre quantique aux états. Un état général s'écrit

$$\prod_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^{l_m} |0, p\rangle.$$

Essayons de retrouver ces états avec des insertions d'opérateurs dans des intégrales de chemin.

Dans un premier temps, vérifions que l'insertion de l'opérateur donne $|0\rangle$, ce que la fonctionnelle d'onde de l'état du vide d'une théorie sur un cercle $|z|=r$ est

$$\psi_0(x_f) = \int_{x_f(r)} \mathcal{D}X \cdot e^{-S(X)}.$$

On veut vérifier que ça satisfait $\alpha_m |0\rangle = 0 \quad \forall m > 0$.

Comment agit un opérateur sur une fonctionnelle d'onde ? On insère l'intégrale de contour

$$\alpha_m = i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \cdot \partial X(z),$$

en $|z| < r$ et on garde l'intégration $\mathcal{D}X$ avec la condition finale $X(|z|=r) = x_f$. (l'état va disparaître qu'il agit avec α_m)

$$\alpha_m \psi_0(x_f) \propto \int_{x_f} \mathcal{D}X \cdot e^{-S(X)} \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \omega^m \partial X(\omega)$$

Si l'action diverge par une certaine configuration du champ au ven du disque ($|z| < r$, $e^{-S(X)} \rightarrow 0$ et ne contribue pas à l'intégrale de chemin. Cela nous assure que seule la pet lisse $\partial X(z)$, sans singularité dans le disque, contribuent.

Par de tel fonction,

$$\oint \frac{d\omega}{2\pi i} \omega^m \partial X(\omega) = 0 \quad \forall m \geq 0$$

$$\Rightarrow \psi_0(x_f) \text{ est l'état du vide } \textcircled{\text{ok}}$$

NB: α_0 annihile aussi cet état, on l'identifie comme l'état du vide avec $p=0$.

Qu'en est-il des états excités ? on a

$$\alpha_{-m} |0\rangle = |\partial^m X\rangle$$

et donc, l'état $\alpha_{-m} |0\rangle$ peut être construit depuis l'intégrale de chemin.

$$\alpha_{-m} |0\rangle = \int \mathcal{D}X \cdot e^{-S(X)} \partial^m X(z=0)$$

Démo

Si on agit avec α_m sur $|\partial^m X\rangle$, on a

$$\alpha_m |\partial^m X\rangle \sim \int_{x_f(r)} \mathcal{D}X \cdot e^{-S(X)} \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \omega^m \cdot \partial X(\omega) \partial^m X(z=0)$$

$$\alpha_m \alpha_{-m} |0\rangle \sim \delta_{m,m}$$

$$\sim \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \omega^m \langle \partial X(\omega) \partial^m X(z=0) \rangle$$

En utilisant l'OPE

$$\partial X(z) \partial X(\omega) \sim \frac{1}{(z-\omega)^2}$$

on a

$$\alpha_n |\partial^m X\rangle \sim \oint \frac{d\omega}{9\pi i} \cdot \omega^m \partial_z^{m-1} \frac{1}{(\omega-z)^2} \Big|_{z=0} = m! \oint \frac{d\omega}{9\pi i} \cdot \omega^{m-m-1}$$

$$= 0 \quad \text{sauf si } m=m$$

$$\sim \delta_{m,m}$$

D

Enfin, intéressons-nous aux zéro-modes ie $\alpha_0 \sim p$. L'impulsion d'un état va apparaître en faisant une insertion d'op. $e^{ip \cdot X}$
 Par exemple,

$$|0, p\rangle \sim \int dX \cdot e^{-S(X)} \cdot \underbrace{e^{ip \cdot X(z=0)}}_{V_p(z=0)} \quad (TPB)$$

avec $V_p(z, \bar{z})$ un op. de vertex.

XIX. ETATS ET OPÉRATEURS DE VERTEX

On considère l'invariance sous diffeos. Une théorie avec une métrique dynamique, insère des opérateurs dans la worldsheet ne donne pas des opérateurs invariants sous diffeos. Autrement dit, on a l'intégrale de chemin

$$\int dX d\bar{g} \cdot e^{-S_{\text{red}}(X, g)}$$

et l'invariance conforme permettrait d'écrire

$$\int d\bar{g} \cdot \int dX \cdot e^{-S_{\text{red}}(X, g=\tau)}$$

L'action de Polyakov est invariante conforme, mais rien ne nous assure que si l'on y insère des ops, elle le restera.

Pour obtenir un objet invariant sous diffeos de la worldsheet, on doit intégrer sur toute la worldsheet. Les insertions d'opérateurs dans la jauge conforme sont donc

$$V \sim \int d^2z \cdot \mathcal{O}(z),$$

à une constante de normalisation près.

Ainsi, intégrer sur toute la worldsheet résout des diffeos, mais qu'en est-il des symétries de Weyl?

La mesure $d^2z d\bar{z} = d^2z$ a un poids $(-1, -1)$ sous le rescaling. Pour le compenser, l'opérateur $\mathcal{O}$ doit avoir un poids $(1, 1)$.

Les états physiques sont donc les états primaires de la CFT de poids $(1, 1)$. On appelle l'op V associé à ces états un opérateur de vertex.

De plus, un opérateur comme $\partial^m X$ est tel en CFT mais par pour la théorie des cordes car il a un poids $(m, 0)$.

Exemple : cordes fermées dans un espace plat

Tachyon

Redéfinir le spectre de la corde fermée dans un espace plat. On commence avec le ground state, que l'on avait identifié à un tachyon. Le vide d'une CFT est associé à l'opérateur identité, mais on a aussi des zero modes. On peut donner de l'impulsion p^μ à la corde en agissant avec l'opérateur $e^{ip \cdot X}$. L'opérateur de vertex associé au ground state de la corde est

$$V_{\text{tachyon}} \sim \int d^2z : e^{ip \cdot X} :$$

L'opérateur

$$V_p = e^{ip \cdot X(z, \bar{z})}$$

avec $p \cdot X = \sum_{n=0}^{\infty} p_n X^n$ est primaire.

On calcule

$$T(\omega) V_p(z, \bar{z}) \quad \text{et} \quad \bar{T}(\omega) V_p(z, \bar{z})$$

et on a

$$(h, \bar{h}) = \frac{\alpha' \cdot p^2}{4} (1, 1).$$

Cependant, l'invariance de Weyl requiert que l'opérateur ait un poids $(1, 1)$, ce qui est vrai si

$$\frac{\alpha' \cdot p^2}{4} = 1 \Leftrightarrow -p^2 = -\frac{4}{\alpha'}$$

$$\Rightarrow M^2 = -\frac{4}{\alpha'} \text{ masse d'un tachyon.}$$

→ on identifie cet opérateur à celui qui crée des tachyons.

Graviton

Regardons les premiers états excités. Pour $N = \bar{N} = 1$, on pourrait créer un état comme

$$\sum_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0; p\rangle$$

avec $\sum_{\mu\nu}$ un tenseur constant qui détermine le type d'état, avec sa polarisation.

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{\mu\nu} = & G_{\mu\nu} & + & B_{\mu\nu} & + & \Phi \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \text{tracé sym.} & & \text{anti-sym.} & & \text{tracé} \\ & \rightarrow \text{graviton} & & \rightarrow \text{B field} & & \rightarrow \text{dilaton (scalaire)} \end{array}$$

L'opérateur de vertex associé à l'état

$$\alpha_{-1}^\mu |0\rangle = \int dX \cdot e^{-i p \cdot X} \partial X^\mu(z=0)$$

et

$$V_{\text{excité}} \sim \int d^2z : e^{ip \cdot X} \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu : \epsilon_{\mu\nu}$$

où $\partial X^\mu \equiv \alpha_{-1}^\mu$ et $\bar{\partial} X^\mu \equiv \tilde{\alpha}_{-1}^\mu$.

Le poids de cet opérateur est

$$(P, \bar{P}) = \left(1 + \frac{\alpha \cdot p^2}{4}\right) (1, 1)$$

et l'invariance de Weyl requiert que

$$p^2 = 0,$$

et comme le graviton doit être sans masse, c'est cool !

Vérifions que cet opérateur est primaire. On sait que ∂X est primaire, tout comme $e^{ip \cdot X}$. Comme on les considère dans un normal ordering, les extra terms dans les contractions de Wick donneront des termes en

$$\frac{1}{(z-w)^2}$$

dans l'OPE, qui pourrait nuire le fait que l'opérateur soit primaire. On a

$$T(w) V_{\text{ext.}} \sim \eta_{\mu}^{\rho} \frac{1}{(z-w)^2} \cdot \rho^{\mu} \frac{1}{z-w} : \partial X^{\nu} e^{ip \cdot X} : \sum_{\mu}$$

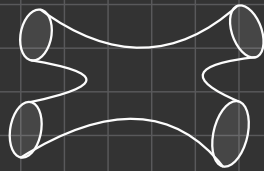
$$\Rightarrow \rho^{\mu} \sum_{\mu} = \rho^{\nu} \sum_{\mu} = 0$$

et ça impose que le graviton soit transverse, il n'y aura pas de polarisation longitudinale.

Chapitre 6 : interactions de cordes

On veut maintenant considérer des interactions de cordes. Si on continue avec notre analogie et avec la QFT, on pourrait penser que les interactions demandent d'ajouter des termes non-linéaires à l'action. Ce n'est cependant pas le cas. Cela briserait la symétrie de jauge. En fait, toutes les infos pour les interactions sont déjà contenues dans la théorie libre, décrite par l'action de Polyakov.

Les diagrammes de Feynmann de QFT deviennent des surfaces de Riemann :



Localement, le diagramme ressemble à une corde libre qui se propage, ce n'est que globalement que l'on voit l'interaction.



peut être map formellement en une sphère



I. TOPOLOGIE DE LA WORLD SHEET

Il existe un autre moyen de créer des interactions à partir d'une théorie à 26 scalaires libres sur la worldsheet.

On se rappelle que la gravité en 2 dimensions ne peut pas être réalisée par l'action d'Einstein-Hilbert : les éq. d'Einstein sont triviales et ne donne pas de contraintes sur la géométrie car

$$2R_{ab} = Rg_{ab},$$

? ou ?

indépendamment des éq. d'Einstein. Il y a cependant une signification topologique à l'action de Einstein-Hilbert, donnée par le thm de Gauss-Bonnet :

$$\chi(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{g} R^{(2)},$$

avec χ la caractéristique d'Euler de la worldsheet, qui est un invariant topologique. Comme l'intégrale de chemin demande d'intégrer sur toutes les métriques et de sommer sur les topologies, ce thm va s'avérer utile.

On considère l'action de la corde

$$S_{\text{string}} = S_{\text{rel}} + \lambda \chi,$$

avec λ la caractéristique d'Euler de la worldsheet.

Pour des variétés sans boundary, la caractéristique d'Euler est

$$\chi = 2(1-g) \sim \int_{\Sigma} R^{(2)}$$

avec g le genus de la surface Σ

g	0	1	2	3
χ	2	0	-2	-4

→ le # trous est contenu dans le genre

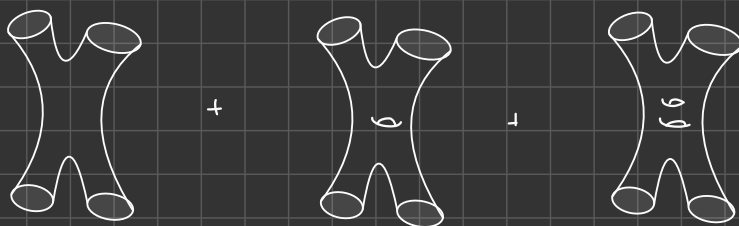
Le genre est un invariant topologique : les variétés topologiques avec le même genre sont homéomorphes. L'intégrale de chemin de la corde est

$$\sum_{\text{topo}} e^{-2\pi(1-g)} \int \mathcal{D}g \cdot \mathcal{D}X \cdot e^{-S_{\text{cl}}}$$

Pour $e^{\lambda} \ll 1$, on a une bonne expansion perturbative (série asymp.) en terme de g . On définit alors la constante de couplage de la corde par

$$g_s = e^{\lambda}.$$

En sommant sur les topologies ie en considérant une expansion perturbative des interactions de la corde, on a l'existence de diagrammes de "boucle" :



II. AMPLITUDE DE VIRASORO - SHAPIRO

On veut calculer la matrice -5 , obtenue en considérant les fonctions de corrélations d'états asymptotiques. Sa correspondance état - opérateur nous dit que ces états sont générés par des ops de vertex sur la worldsheet.

Pour m états α avec une impulsion p_i , on a le même nombre d'opérateurs de vertex $V_{\alpha_i}(p_i)$. Les éléments de matrice du tree-level sont donnés par

$$A^{(m)} = \frac{1}{g_s^2} \cdot \frac{1}{\text{vol}} \int dX \mathcal{D}g \cdot e^{-S_{\text{cl}}} \prod_{i=1}^m V_{\alpha_i}(p_i).$$

L'intégrale de chemin suggère que l'on intègre sur toutes les métriques sur la sphère. Cependant, toutes les métriques sur la sphère sont conformément plates : on peut fixer le diffeo et les libertés de jauge de Weyl pour calculer des fonctions de corrélation sur le plan au lieu de la sphère. On voit déjà qu'il y a une symétrie de jauge résistante : les hfs conformes $SL(2, \mathbb{C}) / \mathbb{Z}_2$, qui permettent de bouger 3 points quel que du plan.

Si on considère la diffusion des tachyons, ils sont générés par les ops de vertex

$$V(p_i) = g_s \int d^2z \cdot e^{ip_i \cdot X} = g_s \int d^2z \cdot \hat{V}(z, p_i).$$

La matrice -5 devient

$$A^{(m)} = \frac{g_s^{m-2}}{\text{vol}(SL(2, \mathbb{C}))} \int \prod_{i=1}^m d^2z_i \cdot \langle \hat{V}(z_1, p_1) \dots \hat{V}(z_m, p_m) \rangle.$$

Au TPO, on a calculé que l'amplitude de Veneziano-Sjöstrand est

$$A^{(n)} \sim g_s^2 \delta^{(26)}(\sum_i p_i) 2\pi \frac{\Gamma(-\frac{\alpha' u}{4}-1) \Gamma(-\frac{\alpha' s}{4}-1) \Gamma(-1-\frac{\alpha' t}{4})}{\Gamma(2+\frac{\alpha' u}{4}) \Gamma(2+\frac{\alpha' s}{4}) \Gamma(2+\frac{\alpha' t}{4})}$$

c'est une amplitude de tachyon. Si on prend la limite $s \rightarrow \infty$ et qu'on utilise le comportement asymptotique de la fonction gamma

$$\Gamma(x) \sim e^{x \ln(x)}$$

on peut mg

$$A^{(n)} \sim g_s^2 \delta^{(26)}(\sum_i p_i) \cdot \exp\left(-\frac{\alpha'}{2} (s \ln(s) + t \ln(t) + u \ln(u))\right).$$

L'amplitude du tree-level décroît exponentiellement à très haute énergie. Individuellement, chaque diagramme de particule de Feynman contribue à l'amplitude de la corde diverge, mais la somme infinie de ces diagrammes donne un résultat fini.

C'est une conséquence du fait que la théorie des cordes est une théorie d'objets étendus: l'interaction est lissée et ne produit plus un point singulier, un vertex, mais une surface étendue. Le fait que ce soit UV-fini est une caractéristique des amplitudes 1 et 2-loop.

Chapitre 7: actions effectives à basse énergie

Jusqu'ici, on a seulement discuté de cordes se propageant dans l'espace-temps plat. Ici, on va considérer des cordes se propageant dans différents backgrounds, ie dans différents CFT sur la worldsheet de la corde.

Une généralisation de l'action de Polyakov pour décrire une corde se déplaçant dans un espace-temps courbe est

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} \cdot g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(x),$$

$\rightarrow \neq$ tenseur d'Éinstein

où $g_{\alpha\beta}$ est la métrique sur la worldsheet. Cette action décrit une map de la worldsheet dans un espace-temps de métrique $G_{\mu\nu}$.

Le problème avec cette action est que la quantification de la corde formée nous a déjà donné un graviton. Si on veut construire une telle métrique $G_{\mu\nu}$, elle doit être construite à partir des gravitons.

Pour le voir, on doit utiliser les ops de vertex. Si on expand la métrique comme une petite fluctuation autour d'un espace plat, on a

$$G_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$$

Alors, la fonction de partition construite à partir de l'action est reliée à celle de l'espace plat la

$$Z = \int \mathcal{D}X \cdot \mathcal{D}g \cdot e^{-S_{\text{flat}} - V} = \int \mathcal{D}X \cdot \mathcal{D}g \cdot e^{-S_{\text{flat}}} \cdot (1 - V + \frac{1}{2}V^2 + \dots)$$

où

$$V = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} \cdot g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu h_{\mu\nu}(x)$$

V est en fait l'opérateur de vertex associé à l'état de graviton de la corde.

Pour une onde plane correspondant à un graviton dont la polarisation est donnée par le tenseur sym. et sans trace $\epsilon_{\mu\nu}$ et l'impulsion p^μ , la fluctuation est donnée par

$$h_{\mu\nu}(x) = \epsilon_{\mu\nu} e^{ip \cdot x},$$

et on retrouve bien notre op. de vertex.

Remarque

De manière générale, n'importe quelle superposition linéaire d'onde plane marche pour construire $h_{\mu\nu}(x)$.

Insérer une copie de V dans l'intégrale de chemin $\equiv$ introduire un état de graviton. Insérer e^V correspond à un état cohérent de graviton et change la métrique $\delta_{\mu\nu}$ en $\delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$.

La métrique courbe de S est donc bien construite à partir des gravitons quantifiés.

I. EQUATIONS D'EINSTEIN

En jauge conforme, l'action de Polyakov dans un espace plat se réduit à une théorie libre, ce qui nous a permis de calculer le spectre de la théorie. Ce n'est plus le cas pour un espace courbe.

En jauge conforme, la théorie de la worldsheet est décrite par une théorie des champs d'interaction à 2d :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot G_{\mu\nu}(x) \partial_\sigma x^\mu \partial^\sigma x^\nu.$$

La théorie a un nombre infini de constantes de couplage stockées dans $G_{\mu\nu}$. On peut également utiliser la théorie des perturbations par étudier la CFT de $\mathcal{S}$: la métrique varie sur une échelle $\gg \sqrt{\alpha'}$. Une quantile calculée en théorie des cordes est donnée par une double perturbation expansion : une en α' et une en g_s .

Fonction Beta (Connexion entre le target space et la worldsheet)

Classiquement, la théorie décrite par

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot G_{\mu\nu}(x) \partial_\sigma x^\mu \partial^\sigma x^\nu$$

est invariante conforme. Ce n'est pas spécialement le cas quantiquement (anomalie). Pour régulariser les divergences, on va introduire un cut-off UV et après renormalisation, les quantités physiques dépendent du facteur d'échelle μ . Si c'est le cas, la théorie n'est plus invariante conforme (ex : Yang-Mills).

En théorie des cordes, l'invariance conforme est une symétrie de jauge et on ne peut pas la perdre. On va donc chercher à comprendre quand $\mathcal{S}$ conserve l'invariance conforme au niveau quantique.

L'objet qui décrit comment les couplages dépendent de μ est la β -fonction. On va plutôt s'intéresser ici à la β -fonctionnelle

$$\beta_{\mu\nu}(G) = \mu \frac{\partial G_{\mu\nu}(x, \mu)}{\partial \mu}.$$

La théorie quantique sera donc invariante conforme si :

$$\beta_{\mu\nu}(G) = 0.$$

Calculons ce qui se passe à 1-loop. On va isoler la divergence UV et voir quelle sorte de contre-terme on doit ajouter. La β -fonction s'annulera si ces c.t. s'annulent.

On choisit les "Minkowski normal coord." dans le T-space pour faciliter les choses autour d'un point $\bar{x}$ tel

$$x^\mu = \bar{x}^\mu + \sqrt{\alpha'} \cdot \psi^\mu$$

où $\psi^\mu \equiv$ fluctuations dynamiques, tel

$$G_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} - \frac{\alpha'}{3} R_{\mu\nu\lambda\delta}(\bar{x}) \psi^\lambda \psi^\delta + \mathcal{O}(\psi^3).$$

À l'ordre quatre des fluctuations, l'action devient

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \left\{ \partial\varphi^\mu \partial\varphi^\nu \eta_{\mu\nu} - \frac{\alpha'}{3} R_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^\mu \varphi^\nu \partial\varphi^\rho \partial\varphi^\sigma \right\}$$

et on peut traiter ça comme une QFT d'interaction en 2d:

$$\sim \alpha' R_{\mu\nu\rho\sigma} \cdot h^2 \quad \sim \lambda$$

Maintenant que l'on a réduit le problème à une simple QFT, on peut calculer la β -fonction. La divergence vient du diagramme



et il y a plus simple de le traiter dans l'espace des positions. Le propagateur pour une particule scalaire est

$$\langle \varphi^\mu(\sigma) \varphi^\nu(\sigma') \rangle = -\frac{1}{2} \delta^{\mu\nu} \ln |\sigma - \sigma'|^2,$$

et il diverge pour $\sigma \rightarrow \sigma'$. Pour isoler la divergence, on utilise la régularisation dimensionnelle avec $d = 2 + \varepsilon$. Le propa. devient

$$\langle \varphi^\mu(\sigma) \varphi^\nu(\sigma') \rangle = 2\pi \delta^{\mu\nu} \int \frac{d^{2+\varepsilon}k}{(2\pi)^{2+\varepsilon}} \cdot \frac{e^{i2(\sigma-\sigma') \cdot k}}{k^2}.$$

Par soustraction de terme en $\frac{1}{\varepsilon}$, on ajoute le contre-terme

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^\mu \varphi^\nu \partial\varphi^\rho \partial\varphi^\sigma \rightarrow R_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^\mu \varphi^\nu \partial\varphi^\rho \partial\varphi^\sigma - \frac{1}{\varepsilon} R_{\mu\nu} \partial\varphi^\mu \partial\varphi^\nu$$

Cela peut être réabsorbé par la renormalisation de la fct d'onde

$$\varphi^\mu \rightarrow \varphi^\mu + \frac{\alpha'}{6\varepsilon} R_{\mu\nu} \varphi^\nu$$

et avec la renormalisation de la constante de couplage $G_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{\varepsilon} R_{\mu\nu}.$$

Ainsi, l'invariance conforme est obtenue si

$$\beta_{\mu\nu}(G) = \alpha' R_{\mu\nu} = 0 !$$

→ Wouah! La demande pour que la théorie soit invariante conforme est que le T-espace soit Ricci plat: $R_{\mu\nu} = 0$

→ Le spacetime dans lequel la corde se déplace doit obéir aux eqs d'Einstein dans le vide

Les eqs de la GR décrivent ainsi le flot du groupe de renorm. de ces sigma-modèles à 2d!

Le dilaton

Répondons comment la corde couple à un champ de dilaton $\Phi(x)$, ce qui est plus subtil. Une construction naïve de l'opérateur de vertex n'est pas primaire (voir Polchinski pour la bonne dérivation).

L'action d'une corde se déplaçant dans un background incluant des profils pour les champs sans masse $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ et $\Phi(x)$ est donné par

$$\begin{aligned} S &\sim \int d\sigma \left\{ \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(x) + i B_{\mu\nu}(x) \underbrace{\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu}_{\text{antisymétrique}} + i \underbrace{B_{\mu\nu}(x) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu}_{\text{terme topologique car n'implique pas la métrique}} \varepsilon^{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{g} \alpha' \Phi(x) R_{(2d)} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma \sqrt{g} \left\{ G_{\mu\nu}(x) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g^{\alpha\beta} + i B_{\mu\nu}(x) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \varepsilon^{\alpha\beta} + \alpha' \Phi(x) R^{(2)} \right\} \end{aligned}$$

notation d'orientation sur la surface de Riemann

Le couplage du dilaton est supposé car :

- Le terme dans l'action s'annule sur une worldsheet plate car $R^{(2d)} = 0$. C'est une des raisons pour lesquelles il est tricky de déterminer ce couplage via les cusp de vertex.
- Le couplage du dilaton ne respecte pas l'invariance de Weyl, mais il y a un moyen de restaurer ça, grâce au α' .

En effet, α' est simplement là pour des raisons dimensionnelles. Cependant, α' joue un rôle dans le paramètre d'expansion de la boucle $\sqrt{\alpha'}$. Ce qui veut dire que le manque d'invariance de Weyl peut être compensé par une contribution à une boucle provenant des couplages à $G_{\mu\nu}$ et $B_{\mu\nu}$. Pour le voir explicitement, on calcule les β -fct de la théorie 2d :

$$\beta' = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma \sqrt{g} \left\{ G_{\mu\nu}(x) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g^{\alpha\beta} + i B_{\mu\nu}(x) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \varepsilon^{\alpha\beta} + \alpha' \Phi(x) R^{(2)} \right\}$$

On a que

$$\beta_{\mu\nu}(G) = \alpha' R_{\mu\nu} + 2\alpha' \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{\alpha'}{4} H_{\mu\lambda\kappa} H_\nu{}^{\lambda\kappa}$$

avec $H = dB$, et la 1-forme de jauge

$$B \rightarrow B + d\Lambda \quad \text{1-forme}$$

$$\beta_{\mu\nu}(B) = -\frac{\alpha'}{2} \nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} + \alpha' (D^\lambda \Phi) H_{\lambda\mu\nu}$$

$$\beta_\mu(\Phi) = -\frac{\alpha'}{2} \nabla^2 \Phi + \alpha' \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - \frac{\alpha'}{24} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda}$$

L'invariance de Weyl requiert

$$\beta_{\mu\nu}(G) = \beta_{\mu\nu}(B) = \beta_\mu(\Phi) = 0.$$

Cette eq. peut être vue comme les EOM du background dans lequel la corde se propage. On cherche une action d'espace-temps $D = 26$ qui reproduit ces eqs de β -fonctions comme EOM.

C'est l'action effective à basse énergie de la corde bosonique

$$S = \frac{1}{2\alpha'} \int d^{26}x \sqrt{-G} e^{-2\Phi} \left(R - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} + 4 \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi \right)$$

où l'on a fait une rotation de Wick vers l'espace de Minkowski.

→ théorie dans le target space

Sergio Cecotti:

Chapitre 8: compactification et T-dualité

On va considérer la compactification la + simple de la corde bosonique: un background spacetime de la forme

$$\mathbb{R}^{1,94} \times S^1.$$

Le cercle a un rayon R les coord. de S^1 ont la périodicité

$$X^{25} = X^{25} + 2\pi R.$$

On va commencer à s'intéresser à la physique à des échelles de longueur $\gg R$, où le mouvement sur S^1 peut être négligé. On veut comprendre à quoi la physique ressemble pour un observateur vivant sur l'espace de Minkowski: non compact $\mathbb{R}^{1,24}$.

Avec les cordes bosoniques, on finit avec 26 dimensions. Avec la théorie des supercordes, on finit avec 10 dimensions. Cependant, on vit dans un espace-temps à $(1+3)$ -dim. Pour résoudre ce pb, on compactifie donc. Les extra dimensions sont enroulées le long d'une variété compacte.

En 1919, Kaluza et Klein ont unifié GR et EM, les 2 interactions connues à ce moment.

I. KALUZA-KLEIN MIRACLE

on va partir de la GR à 4d et de l'EM de Maxwell épd la GR à 5d.

Considérons que l'on est dans une variété lorentzienne à 5d avec une métrique

$$\tilde{g}_{MN} = (\bar{g}_{\mu\nu}, g_{\mu 5}, g_{55}) \quad ? \text{ par } \bar{g}_{\mu\nu}$$

$\downarrow$
 A_μ photon

$\downarrow$
 KK-scalaire

avec $M=0, \dots, 5$ et

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + g_{\mu 5} dx^\mu dx^5 + g_{55} dx^5 dx^5.$$

On pose

$$g_{55} = e^{2\sigma}; \quad g_{\mu 5} = A_\mu \cdot e^{2\sigma}; \quad g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - e^{2\sigma} A_\mu A_\nu.$$

et on a l'ansatz de Kaluza-Klein:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2\sigma(x)} (dx^5 + A_\mu dx^\mu)^2.$$

$$\Rightarrow \tilde{g}_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} \bar{g}_{\mu\nu} + e^{2\sigma} A_\mu A_\nu & e^{2\sigma} A_\nu \\ \hline e^{2\sigma} A_\mu & e^{2\sigma} \end{array} \right).$$

Après calcul, on trouve

$$\tilde{g}_{5\mu} = -A_\mu, \quad \tilde{g}_{55} = e^{-2\sigma} + A_\mu A^\mu; \quad \tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$$

Mais pourquoi a-t-on que $\tilde{g}^{5\mu} \sim A^\mu$? Pour le comprendre, on considère la sous-classe de difféo

$$x^\mu \rightarrow x^\mu \quad ; \quad x^5 \rightarrow x^5 + \Lambda(x^\mu).$$

Alors,

$$\begin{aligned} e^{2\sigma} A_\mu &= \tilde{g}_{\mu 5} \rightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^5} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \cdot \tilde{g}_{\nu 5} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu} \cdot \tilde{g}_{\mu 5} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu} \tilde{g}_{\mu 5} + \frac{\partial x^5}{\partial x'^\mu} \tilde{g}_{55} \quad ? \\ &= \tilde{g}_{\mu 5} - \partial_\mu (\Lambda \tilde{g}_{55}) \\ &= e^{2\sigma} (A_\mu - \partial_\mu \Lambda) \end{aligned}$$

et le principe de covariance générale en 5d indique que l'on a invariance de jauge en 4d et covariance générale en 5d.

On considère que la métrique ne dépend pas de x^5 et on prend x^5 le long d'une variété compacte 1-dimensionnelle : S^1

$$\rightarrow \mathcal{M}_5 = \mathcal{M}_4 \times S^1. \quad \rightarrow \text{idée de K-K.}$$

On calcule les symboles de Christoffel en gardant en tête que $\partial_5 \tilde{g}_{\mu\nu} = 0$ comme $\tilde{g}$ ne dépend plus de x^5 .
Après calcul, on obtient le scalaire de Ricci

$$R^{(5)} = R^{(4)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{Kaluza-Klein miracle.}$$

Si on prend l'action d'Einstein-Hilbert, on a

$$\begin{aligned} S_{EH}^{(5)} &= \frac{1}{8\pi G^{(5)}} \int d^5x \cdot \sqrt{-\tilde{g}^{(5)}} \left(R^{(4)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \\ &\quad \downarrow \tilde{g}^{(5)} = g^{(4)} e^{2\sigma} \\ &\stackrel{\text{car mtr. } x^5 \text{ est un cercle}}{\rightarrow} = \frac{2\pi R}{4\pi G^{(5)}} \int d^4x \cdot \sqrt{-g^{(4)}} \left(R^{(4)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow S_{E.H.}^{(5)} = \frac{1}{8\pi G^{(4)}} \left(S_{EH}^{(4)} + S_{E\sigma}^{(4)} \right) \quad \text{K-K miracle - 1926}$$

Pour les calculs, pour simplifier les choses, on a pris $\sigma=0$ pour linéariser la 5^e dimension. Si on avait gardé $\sigma=\sigma$, on aurait eu

$$S = \frac{2\pi R}{8\pi G^{(5)}} \int d^4x \cdot \sqrt{-g^{(4)}} \cdot e^\sigma \cdot \left(R^{(4)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma \right)$$

$\rightarrow$ on trouve une théorie avec de la gravité et de l'EST couplés d'une façon non-minimale à un scalaire σ .

En fait, on a rescalé le champ de jauge à $A_i = A_m / R$ sous lequel la charge de ϕ_n est $n \in \mathbb{Z}$.

Point de vue de la worldsheet

on regarde la compactification KK du point de vue de la corde. On veut étudier une corde se déplaçant dans $\mathbb{R}^{1,24} \times S^1$. Le cercle compact modélise la dynamique des cordes de 2 manières.

Spatial momentum is quantized

Par la voir, on demande que la fct d'onde de la corde, incluant $e^{ip \cdot X}$, soit périodique :

$$\psi \sim e^{ipX}$$

et comme elle s'enroule autour d'un cercle,

$$\psi(X^\mu, X^{25}) = \psi(X^\mu, X^{25} + 2\pi R)$$

$$\Leftrightarrow e^{ip^{25} \cdot X^{25}} = e^{ip^{25} \cdot X^{25} + ip^{25} \cdot 2\pi R}$$

$$\Leftrightarrow e^{ip^{25} \cdot 2\pi R} = 1$$

$$\Leftrightarrow p^{25} \cdot R = n \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$

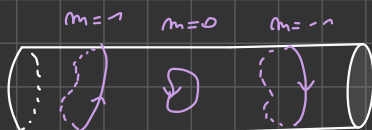
$$\Rightarrow \boxed{p^{25} = \frac{n}{R}} \quad \text{quantized}$$

Conditions de bord

on peut autoriser des B.C. plus générale pour l'expansion en mode de X . Quand on bouge le long de la corde, on n'a plus besoin de $X(\sigma + 2\pi) = X(\sigma)$, mais de

$$\boxed{X^{25}(\sigma + 2\pi) = X^{25}(\sigma) + 2\pi n R} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

L'entier n indique combien de fois la corde s'enroule autour de S^1 . on l'appelle le winding number, k



L'expansion en mode de la corde est

$$X^{25}(\sigma, \tau) = x^{25} + \alpha' p^{25} \tau + \underbrace{\sum_n \frac{1}{n} e^{-in(\tau-\sigma)}}_{\text{modes d'oscillation}} \alpha_n$$

$$\Leftrightarrow X^{25}(\sigma, \tau) = x^{25} + \alpha' \frac{n}{R} \tau + n R \sigma + \text{osc. modes}$$

Avant de split X^{25} et left et right-movers, on introduit les quantités

$$p_L = \frac{m}{R} + \frac{mR}{\alpha'} \quad \text{et} \quad p_R = \frac{m}{R} - \frac{mR}{\alpha'}$$

$\downarrow$ quantification $\downarrow$ winding

Ensuite, $X^{25}(\sigma, \tau) = X_L^{25}(\sigma^+) + X_R^{25}(\sigma^-)$ avec

$$\begin{cases} X_L^{25} = \frac{1}{2} x^{25} + \frac{1}{2} \alpha' p_L \sigma^+ + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}^{25} e^{-in\sigma^+} \\ X_R^{25} = \frac{1}{2} x^{25} + \frac{1}{2} \alpha' p_R \sigma^- + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha^{25} e^{-in\sigma^-} \end{cases}$$

Réfléchissons au spectre de la théorie par un observateur vivant dans $D=25$ directions non-compactes. Chaque état de particule sera décrit par une impulsion p^μ , $\mu = 0, \dots, 24$.

La masse de la particule est

$$M^2 = - \sum_{\mu=0}^{24} p_\mu p^\mu$$

Des éqs de L_0 et $\tilde{L}_0$, on a

$$M^2 = p_L^2 + \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N} - 1) = p_R^2 + \frac{4}{\alpha'} (N - 1)$$

et maintenant le level-matching ne donne plus $N = \tilde{N}$, mais

$$N - \tilde{N} = m \cdot n \quad \text{level-matching}$$

Ainsi,

$$M^2 = \frac{m^2}{R^2} + \frac{m^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2m \cdot m}{\alpha'} + \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N} - 1)$$

$$= \frac{m^2}{R^2} + \frac{m^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2)$$

↙
KK-tower: une corde avec m unités d'impulsion autour du cercle gagne une contribution de m/R à sa masse.

↘
Une corde qui s'enroule m fois gagne une contribution $2\pi m R T$ à sa masse, avec

$$T = 1/2\pi\alpha'$$

la tension de la corde

Etat sans masse

On s'intéresse aux états sans masse dans $R^{1,24}$, en regardant dans la formule de masse les états avec $m=0$ (ie $p=0$) et $m=0$, la $N = \tilde{N} = 1$.

Les seuls états sont

- $\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0; p\rangle$: sous le groupe de Lorentz $SO(1, 24)$, ces états se décomposent en une matrice $G_{\mu\nu}$, un tenseur antisymétrique $B_{\mu\nu}$ et un scalaire Φ (dilatation)

- $\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^{25} |0; p\rangle$: ce sont deux champs de vecteur. On peut identifier leur somme à $\tilde{A}_\mu$ et leur différence à $\tilde{A}_\mu$ de $B_{\mu\nu}$.

• $\alpha_{-1}^{\mu} \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu} |0, p\rangle$: c'est un scalaire, associé au rayon de la direction compacte S^1 .

Symétrie de jauge améliorée

Avec un cercle, il y a d'autres façons pour construire des états sans masse qui ne dépendent pas $N = \tilde{N} = 1$.

Si on prend $N = \tilde{N} = 0$ et qu'on regarde à des modes avec $m \neq 0$, la level-matching condition $\Rightarrow m = 0$ et $\equiv N - \tilde{N} = m \cdot m$

$$M^2 = \frac{(m \cdot R)^2}{(\alpha')^2} - \frac{4}{\alpha'}$$

et les états peuvent être sans masse quand

$$R^2 = \frac{4\alpha'}{m^2} \quad m \in \mathbb{Z}$$

De même, si on considère $N = \tilde{N} = 0$ et $m = 0$, on a

$$M^2 = \frac{m^2}{R^2} - \underbrace{\frac{4}{\alpha'}}_{\text{masse du tachyon}}$$

qui devient sans masse quand

$$R^2 = \frac{m^2 \alpha'}{4}$$

$\rightarrow$ KK tower et winding number du tachyon ?

Le spectre d'états sans masse le plus riche a lieu quand

$$R = \sqrt{\alpha'}. \quad (\text{voir Tong p 205 pour les } \neq \text{ cas.})$$

Remarques

La formule de masse

$$M^2 = \frac{m^2}{R^2} + \frac{m^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2)$$

est invariante sous l'échange

$$R \leftrightarrow \frac{\alpha'}{R}$$

si, en même temps,

$$m \leftrightarrow m.$$

Ainsi, une corde sur un rayon R a le même spectre que sur un rayon α'/R . Elle réalise cet exploit en échangeant ce que signifie "enrouler" et "lancer".

$\rightarrow$ la corde ne peut pas savoir si c'est un petit ou un grand cercle

$\equiv$ T-dualité.

La T-dualité est une symétrie de la théorie des cordes bosoniques, mais pas de la théorie des supercordes : en SST, c'est une dualité.

III. T-DUALITÉ

on considère une variété à 26 dimensions $\mathcal{M}$

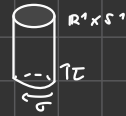
$$\mathcal{M}_{26} = \mathbb{R}^{1,25} \times S^1$$

Le KK-momentum engendre une masse pour la particule du pdc du target space avec p^{25} et

$$p_{26}^2 = \frac{m^2}{R^2} + \frac{4}{\alpha'} (N-1) \quad \text{pg le m?}$$

En ce qui concerne le winding number, on a

$$X^{25}(\sigma + 2\pi) = X^{25}(\sigma) + 2\pi m R$$



avec m le winding number.

La T-dualité consiste à dire que l'on échange le winding number avec le KK-momentum $\mathcal{M}$

$$\begin{cases} m \leftrightarrow m \\ R \leftrightarrow \alpha' / R \end{cases}$$

Lorsque $R \rightarrow +\infty$, on a

$$\begin{cases} M_{KK}^2 \rightarrow 0 \sim 1/R^2 \\ M_{winding}^2 \rightarrow \infty \sim R^2/\alpha'^2 \end{cases}$$

→ La masse des winding modes devient négligeable pour une dynamique à basse énergie.

Les modes d'impulsion deviennent très légers et forment un continu.

Du pdc du spectre d'énergie, ce continu $\equiv$ à ce que l'on veut dire par l'existence d'une direction non compacte dans l'espace.

Lorsque $R \rightarrow 0$, on a

$$\begin{cases} M_{KK}^2 \rightarrow \infty \\ M_{winding}^2 \rightarrow 0 \end{cases}$$

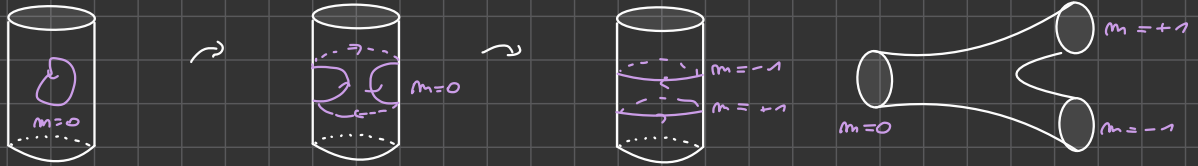
→ Les modes d'impulsion deviennent lourds et peuvent être ignorés : ça prend trop d'énergie de faire bouger qq chose sur S^1

Les winding modes deviennent légers et forment un continu. Le spectre d'énergie résultant est $\mathcal{M}$ une autre dimension d'espace s'ouvre.

Cette T-dualité fournit un autre mécanisme dans lequel la théorie des cordes montre une échelle de lg minimal : quand on réduit la taille d'un cercle, en $R = \sqrt{\alpha'}$, la théorie agit comme si le cercle grandissait de nouveau, avec $m \leftrightarrow m$.

En théorie des cordes, on dit que la T-dualité est une symétrie complète.

Si la quantité de tour dans la direction KK est conservée, il faut aussi que le winding soit conservé.



Pour spécifier un état dans cette situation compactifiée, on a

$$| p_0, \dots, p_{d-1}, \frac{m}{R}, m, \dots \rangle$$

oscillations
↓

Si le worldsheet a une orientation et le winding est induit par cette orientation. Pour que la surface soit orientée, il faut que le winding soit conservé.

La nouvelle direction dans l'espace-temps

Comment décrire cette étrange nouvelle direction spatiale qui s'ouvre en $R \rightarrow 0$? Sous les échanges

$$\begin{cases} m \leftrightarrow m \\ R \leftrightarrow \alpha' / R, \end{cases}$$

on voit que p_L et p_R se tfo comme

$$p_L \rightarrow p_L \quad ; \quad p_R \rightarrow -p_R.$$

Les α subissent aussi un effet

$$\tilde{\alpha}_m^{25} \rightarrow \tilde{\alpha}_m^{25} \quad ; \quad \alpha_m^{25} \rightarrow -\alpha_m^{25},$$

et donc

$$\partial_{\sigma^+} X_L^{25} \rightarrow \partial_{\sigma^+} X_L^{25} \quad ; \quad \partial_{\sigma^-} X_R^{25} \rightarrow -\partial_{\sigma^-} X_R^{25}.$$

On définit alors un nouveau scalaire

$$\psi^{25} = X_L^{25}(\sigma^+) - X_R^{25}(\sigma^-).$$

et

$$X^{25} = X_L^{25}(\sigma^+) + X_R^{25}(\sigma^-).$$

Dans une CFT par un champ scalaire compact et étire, toutes les OPEs de ψ^{25} coïncident avec celles X^{25} . C'est suffisant pour assurer que toutes les interactions définies dans la CFT sont les mêmes.

On peut écrire la nouvelle direction spatiale ψ directement en termes du vieux champ X , sans faire le split en R et L.

De la déq. de ψ , on a

$$\partial_\tau X = \partial_\sigma \psi \quad ; \quad \partial_\sigma X = \partial_\tau \psi$$

$$\Rightarrow \partial_\alpha X = \varepsilon_{\alpha\beta} \partial^\beta \psi$$

avec $\varepsilon_{\tau\sigma} = -\varepsilon_{\sigma\tau} = 1$ (le -1 de $\varepsilon_{\sigma\tau}$ s'annule qd on descend l'indice avec la métrique de signe de la worldsheet)

Pour la corde ouverte, on est obligé de considérer des D-branes sous T-dualité et

Neumann

$\leftrightarrow$

Dirichlet

$$\partial_\sigma X \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0$$

$$\partial_\sigma Y \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0$$

→ le fait de faire une T-dualité a créé une D-brane.

On a donc notre espace d'univers $\Sigma = \mathbb{R} \times S^1$ et on a un plongement dans l'espace cible $X = \mathbb{M} \times S^1_R$ et dans $\tilde{X} = \mathbb{M} \times \tilde{S}^1_{\alpha'/R}$

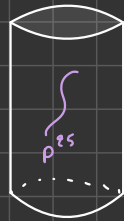
→ dualité entre X et $\tilde{X}$: la corde ne voit pas la diff entre R et α'/R .
et la corde se voit piégée sur une D-brane



Pour la corde ouverte,

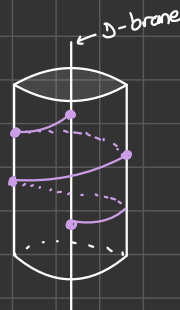
$$p^{\alpha 5} = \frac{m}{R}$$

et en ce qui concerne le winding



$$m=2, m=0$$

T-dualité
→



$$m=0, m=2$$

? $p_9 m=0$

→ la T-dualité fait qu'une Dp-brane devient $\begin{cases} Dp-1 \text{ brane} \\ Dp+1 \end{cases}$
en fonction de quelle direction on a compactifié et en cercle.

IV. T-DUALITÉ ET INTÉGRALE DE CHEMIN

Dualité en (0+0)-dimension (espace-temps = point)

On a une gaussienne avec un ajout de terme linéaire :

$$\int dx. e^{-ax^2+ibx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. e^{-b^2/4a}$$

On a une théorie A et on veut montrer une correspondance avec une théorie B. Pour cette théorie A, on a

$$Z_A = \frac{N}{\sqrt{\pi}} \int dx. e^{-R^2 x^2} \quad \left(= \frac{N}{R} \right)$$

1) on élargit la théorie

$$Z_{\text{master}} = \frac{N}{4\pi R} \int dx dy. e^{-R^2 x^2 + ixy}$$

en ajoutant un champ qui a une interaction avec le champ d'origine x .

2) Deux options se présentent :

a) On intègre y , puis x :

$$\frac{N}{R} \int dx. e^{-R^2 x^2} \delta(0) = \frac{N}{R}$$

?

b) On intègre x , puis y :

$$\frac{N}{9\sqrt{\pi} R} \int dy. e^{-y^2/4R^2} = \frac{N}{R}$$

On a donc

$$\begin{array}{c} Z_{\text{master}} \\ \swarrow \quad \searrow \\ Z_A = Z_B \\ \left\{ \begin{array}{l} x \leftrightarrow y \\ R \leftrightarrow 1/9R \end{array} \right. \end{array}$$

Dualité en (1+1)-dimension

Une façon facile de voir la T-dualité de la théorie quantique est d'utiliser une intégrale de chemin. On considère un champ scalaire périodique $X = X + 2\pi R$ sur le worldsheet. On prend la normalisation

$$X = R \cdot \varphi$$

où φ a une périodicité 2π .

On considère donc l'action

$$S[\varphi] = \frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma. \partial_\alpha \varphi. \partial^\alpha \varphi.$$

La fonction de partition euclidienne par cette théorie est

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]},$$

et on va imaginer la réécrire en termes des nouvelles variables qui décrivent le cercle T-dual.

L'action a une symétrie de shift $\varphi \rightarrow \varphi + 1$ car φ n'apparaît qu'avec sa dérivée. La 1^{re} étape est de rendre la symétrie locale en introduisant un champ de jauge A_α sur le worldsheet où

↳ ie faire en sorte qu'un shift qui dépend de l'espace-temps soit une symétrie du lagrangien.

$$A_\alpha \rightarrow A_\alpha - \partial_\alpha h$$

On complète alors les dérivées par des dérivées covariantes

$$\partial_\alpha \psi \rightarrow D_\alpha \psi = \partial_\alpha \psi + A_\alpha \psi$$

différente de la dérivée cov. de QFT car on a pas A_α car $\psi \sim e^{i\alpha\psi}$ ici (pas de phase)

Cela change notre théorie. Cependant, on peut retourner à la théorie originale en ajoutant un nouveau champ θ tq

$$S_{\text{master}}[\psi, A, \theta] = \frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \cdot \partial_\alpha \psi \partial^\alpha \psi + \frac{i}{2\pi} \int d^2\sigma \cdot \theta \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta$$

interaction, correspond au ψ de $(0+0)$ -dim

tq

$$Z_{\text{master}} = \int D\psi D\theta dA \cdot e^{-S_{\text{master}}}$$

Les options sont

1) intégrer sur θ , puis sur ψ :

?

Dans ce cas,

$$\delta(\partial_\alpha A_\beta) \Rightarrow \overline{F}_{\alpha\beta} = 0$$

et A_α est pure jauge, n'importe quelle valeur de A peut être absorbée par une $U(1)$ de jauge

$$A_\alpha \sim \partial_\alpha \lambda$$

$$A_\alpha \rightarrow A_\alpha = 0 \quad (\text{jauge fixée})$$

et on obtient la théorie d'auant :

$$Z_{\text{master}} = Z_{\text{original}}$$

2) intégrer sur ψ , puis sur θ :

On intègre pleinement sur ψ on fixe la symétrie de jauge tq $A_\alpha \rightarrow A_\alpha - \partial_\alpha \psi$ tq

$$\psi = 0.$$

L'intégrale de chemin devient alors

$$Z = \int D\theta dA \exp\left(-\frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma A_\alpha A^\alpha + \frac{i}{2\pi} \int d^2\sigma \varepsilon^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \theta) A_\beta\right)$$

par partie



et on termine la procédure en intégrant A_α .

$$Z = \int D\theta \exp\left(-\frac{\tilde{R}^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha \theta \partial^\alpha \theta\right)$$

↙ on a complété la carré

avec $\tilde{R} = \frac{\alpha'}{R}$ le rayon du cercle T-dual.

Remarques

• $A_\alpha = \partial_\alpha \varphi \rightarrow$ la dérivée du scalaire a été absorbée dans le A

• Par complétion de carré, on a

$$(A_\alpha + \varepsilon_\alpha^\beta \partial_\beta \varphi)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow A_\alpha = \varepsilon_\alpha^\beta \partial_\beta \varphi \quad \equiv \text{dualité de Hodge } d\varphi = * d\varphi$$

correspond à l'échange entre τ et σ .

En 2d, la dualité échange un scalaire avec un scalaire

En 3d, $d\varphi = * dA$

En 4d, $F = * F \wedge$

$$\frac{1}{g_{4n}^2} \int (F_A \wedge * F_A) = \tilde{g}_{4n}^2 \int (F_{\tilde{A}} \wedge * F_{\tilde{A}})$$

$$\rightarrow \text{S-dualité : super string theory avec } g_{4n} \rightarrow \tilde{g}_{4n} = \frac{1}{g_{4n}}$$

V. T-DUALITÉ POUR LE PREMIER ETAT D'EXCITATION

On veut T-dualiser les champs de la corde formée au 1^{er} niveau d'excitation:

$$\begin{aligned} S \sim \int d\tau \int \sqrt{g} \left(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g^{\alpha\beta} G_{\mu\nu}(x) \right) + i B_{\mu\nu}(x) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \varepsilon^{\alpha\beta} \\ + \sqrt{g} \alpha' \Phi(x) R_{(2d)} \end{aligned}$$

Buscher's rules

On considère l'action master

$$\begin{aligned} S_{\text{master}} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int \sqrt{g} \cdot g^{\alpha\beta} \left\{ G_{00} (\partial_\alpha \varphi + A_\alpha) (\partial_\beta \varphi + A_\beta) + 2 G_{0\mu} (\partial_\alpha \varphi + A_\alpha) \partial_\beta X^\mu \right. \\ \left. + i \varepsilon^{\alpha\beta} \int 2 B_{0\mu} (\partial_\alpha \varphi + A_\alpha) \partial_\beta X^\mu + B_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \right\} + 2 i \varepsilon^{\alpha\beta} \tilde{\partial}_\alpha \varphi A_\beta \end{aligned}$$

La dualisation donne une nouvelle théorie où

$$R \leftrightarrow \tilde{R} = \alpha' / R.$$

Buscher obtient une nouvelle théorie via

$$\tilde{G}, \tilde{B}, \tilde{\Phi}$$

lg

$$\tilde{G}_{00} = \frac{1}{G_{00}} \quad ; \quad \tilde{G}_{0\mu} = \frac{B_{0\mu}}{G_{00}} \quad ; \quad \tilde{B}_{0\mu} = \frac{G_{0\mu}}{G_{00}}$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{(G_{0\mu} G_{0\nu} - B_{0\mu} B_{0\nu})}{G_{00}} \quad ; \quad \tilde{B}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} - \frac{G_{0\mu} B_{0\nu} - G_{0\nu} B_{0\mu}}{G_{00}}$$

pas à connaître par cœur

