5 INTERACTION ELECTRO-FAIBLE POUR LES QUARKS

5.1 Zoologie

→ Il existe 6 quarks

u : up	c : charm	t : top	$Q_{em} = 2/3$
d : down	s : strange	b : bottom	$Q_{em} = -1/3$

→ Ils apparaissent toujours en état liés, décrit par la dynamique QCD. On distingue :

les mesons $q\bar{q}$

$\pi^- : \bar{u}d$

$\pi^+ : \bar{d}u$

$\pi^0 : (\bar{u}u - \bar{d}d)/\sqrt{2}$

$\underbrace{\begin{array}{l} K^- : \bar{u}s \\ K^+ : \bar{s}u \\ K^0 : \bar{d}s \\ \overline{K^0} : \bar{s}d \end{array}}_{\text{spin } 0}$ $\Bigg|$ $\underbrace{\begin{array}{l} \rho^- = \bar{u}d \\ \rho^+ = \bar{d}u \end{array}}_{\text{spin } 1}$

les baryons qqq

$p : uud$

$\underbrace{n : udd}_{\text{spin } 1/2}$

→ La masse des quarks n'est pas accessible directement, mais dans le $\mathcal{L}$ chaque q_i apparait avec un masse de Dirac :

$$\mathcal{L} \ni -m_{q_i} \bar{q}_i q_i$$

$m_u \simeq 2$ MeV $\qquad m_c \simeq 1$ GeV

$m_d \simeq 5$ MeV $\qquad m_b \simeq 4$ GeV

$m_s \simeq 100$ MeV $\qquad m_t \simeq 170$ GeV

→ Les charges electriques sont :

$Q_u = 2/3 \qquad Q_c = 2/3 \qquad Q_t = 2/3$

$Q_d = -1/3 \qquad Q_s = -1/3 \qquad Q_b = -1/3$

5.2 Interactions faibles pour les quarks

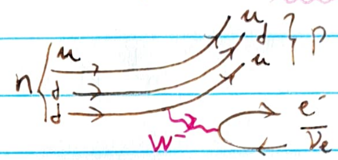
→ Les interactions $n \to p^+ e^- \bar{\nu}_e$ et $\pi^- \to e^- \bar{\nu}_e$ sont bien décrites par l'interaction de Fermi :

$$\mathcal{L}_{u,d,i} \doteq \frac{-1}{\sqrt{2}} G_F \underbrace{(\bar{u}_L \gamma_\mu d_L)}_{\text{quark current}} \underbrace{(\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL} + \bar{\mu}_L \gamma^\mu \nu_{\mu L} + \bar{\tau}_L \gamma^\mu \nu_{\tau L})}_{\text{lepton current } J^{-\mu}}$$

↳ Puisque le courant leptonique $J^{-\mu}$ est déjà présent dans $\mathcal{L} \ni \frac{g}{\sqrt{2}} (J^-_\mu W^{-\mu} + J^+_\mu W^{+\mu})$, celà suggère une structure analogue pour les quarks :

$$J^+_\mu = \bar{\nu}_e \gamma_\mu e_L + \bar{\nu}_\mu \gamma_\mu \mu_L + \bar{\nu}_\tau \gamma_\mu \tau_L + \bar{u}_L \gamma_\mu d_L$$

↳ Dans ce cas, $n \to p e \bar{\nu}_e$



$\pi^- \to e^- \bar{\nu}_e$

Pour obtenir $\bar{u}_L \gamma_\mu d_L$ dans J_μ^+ et $\bar{d}_L \gamma_\mu u_L$ et J_μ^-, il faut utiliser la même structure que pour les leptons.

DEF

On définit les doublets de quarks $Q_L^{u_i}$ selon : (sous $SU(2)_L$)

$$Q_L^u = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad Q_L^c = \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q_L^t = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \qquad // \; L_{\ell i} = \begin{pmatrix} \nu_{Li} \\ \ell_{Li} \end{pmatrix}$$

Les singlets de quarks q_R^i selon : (sous $SU(2)_L$)

u_R , c_R et t_R mais aussi :

d_R , s_R et b_R

↳ Il faut aussi les singlets (u_R, c_R, t_R) car les quarks sont chargés électriquement, et il n'y a pas de structure chirale observée dans les interactions e-m : les γ couplent aux q_L et aux q_R de la même manière.

⊙ Charges sous $U(1)_Y$:

→ $Q\{u_L\} = 2/3 = 1/2 + Y_Q/2 \Rightarrow Y_Q = 1/3$
$Q\{d_L\} = -1/3 = -1/2 + Y_Q/2 \Rightarrow Y_Q = 1/3$

] même hypercharge car $u_L, d_L \in Q_L^u$ le même doublet

→ $Q\{u_R\} = 2/3 = 0 + Y_{u_R}/2 \Rightarrow Y_{u_R} = 4/3$
$Q\{d_R\} = -1/3 = 0 + Y_{d_R}/2 \Rightarrow Y_{d_R} = -2/3$
Ces valeurs de Y_{u_R}, Y_{d_R} sont de simples données du MS. Cependant, elles sont des prédictions de certaines théories de grande unification, comme SO(10) GUT.

⊙ Lagrangien et courants :

→ Le Lagrangien (termes cinétiques) pour les fermions accueille 3 nouveaux termes :

$$\mathcal{L} \ni \sum_{j=e,\mu,\tau} \left(i \bar{L}_j \not{D} L_j + i \bar{e}_{R_j} \not{D} e_{R_j} \right)$$

$$\left.\begin{aligned} &+ \sum_{k=u,c,t} \left(i \bar{Q}_L^k \not{D} Q_L^k + i \bar{q}_R^k \not{D} q_R^k \right) \\ &+ \sum_{k=d,s,b} \left(i \bar{q}_R^k \not{D} q_R^k \right) \end{aligned}\right\} \text{nouveaux termes}$$

$$\text{avec } D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\tau_a}{2} W_{a\mu} - ig' \frac{Y}{2} B_\mu$$

→ Les courants chargés : analogues aux leptons en remplaçant $\nu_L \mapsto u_L$ et $e_L \mapsto d_L$ avec les Y appropriés.
→ Les courants neutres : analogues aux leptons en remplaçant $\nu_L \mapsto u_L$, $e_L \mapsto d_L$, $e_R \mapsto u_R$ et $e_R \mapsto d_R$ avec les Y appropriés.

→ $\mathcal{L}^{NC}_{quark} = e J_\mu^{em} A^\mu + \frac{g}{\cos\theta_W} J_\mu^Z Z^\mu$ avec

p719 Peskin

↳ $J_\mu^{em} = \sum_{j=u,c,t,d,s,b} Q_j \bar{q}_j \gamma_\mu q_j$ et

↳ $J_\mu^Z = \sum_{j=u,c,t} \left(g_L^u \bar{q}_{L_j} \gamma_\mu q_{L_j} + g_R^u \bar{q}_{R_j} \gamma_\mu q_{R_j} \right)$

$$+ \sum_{k=d,s,b} \left(g_L^d \bar{q}_{L_k} \gamma_\mu q_{L_k} + g_R^d \bar{q}_{R_k} \gamma_\mu q_{R_k} \right)$$

$$\text{avec } \left.\begin{aligned} g_L^u &\equiv \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W \\ g_L^d &\equiv \frac{-1}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W \\ g_R^u &\equiv \frac{-2}{3}\sin^2\theta_W \\ g_R^d &\equiv \frac{1}{3}\sin^2\theta_W \end{aligned}\right\} T_3 - Q\sin^2\theta_W$$

51

Masses des quarks :

→ La masse des quarks se déduit du terme d'interaction de Yukawa évalué dans le vide :

$$\mathcal{L} \ni -y^D_{ij} \overline{Q}_{Li} \phi \, d_{Rj} + h.c. \quad \text{(autorisé car inv. de jauge)}$$

$$\mathcal{L}\Big|_{vev} \ni -y^D_{ij} \left(\frac{v+h}{\sqrt{2}}\right) \bar{d}_{Li} \, d_{Rj} + h.c.$$

$$= -y^D_{ij} \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{d}_{Li} \, d_{Rj} - \frac{h}{\sqrt{2}} \bar{d}_{Li} \, d_{Rj} + h.c.$$

DEF La matrice de masse des quarks (d, s, b) m_D est donnée par

$$(m_D)_{ij} = y^D_{ij} \cdot \frac{v}{\sqrt{2}}$$

→ Pour trouver la masse des quarks (u, c, t), c'est moins direct. En effet, un simple terme du type $\overline{Q}_{Li} \phi \, u_{Rj}$ est interdit car il ne conserve pas l'hypercharge : $Y(\overline{Q}_L \phi \, u_R) = -\frac{1}{3} + 1 + \frac{4}{3} \neq 0$

On prend alors la conjugaison de charge du champ ϕ :

$$\tilde{\phi} \equiv i \tau_2 \phi^*$$

↳ $\tilde{\phi}$ se transforme comme ϕ sous $SU(2)_L$, mais possède une hypercharge opposée. On peut alors écrire :

$$\mathcal{L} \ni -y^U_{ij} \overline{Q}_{Li} \tilde{\phi} \, u_{Rj} + h.c. \quad \text{(invariant sous } SU(2)_L \times U(1)_Y\text{)}$$

$$\mathcal{L}\Big|_{vev} = -y^U_{ij} \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{u}_{Li} \, u_{Rj} - y^U_{ij} \frac{h}{\sqrt{2}} \bar{u}_{Li} \, u_{Rj} + h.c.$$

DEF La matrice de masse des quarks (u, c, t) m_U est donnée par

$$(m_U)_{ij} = y^U_{ij} \cdot \frac{v}{\sqrt{2}}$$

PROP Le même champ scalaire ϕ génère la masse de $W, Z, e, \mu, \tau, u, c, t, d, s, b$. Seule exception : $m_h^2 = -2\mu^2$.

⊙ Changements de base et matrice CKM :

→ Les matrices m_D et $m_U \in Mat(3\times 3, \mathbb{C}) \rightsquigarrow 18$ paramètres chacunes. On peut les diagonaliser par transformation bi-unitaire : en écrivant $m = HV$ avec H hermitien et V unitaire, on a :

$$U^\dagger H U = M_{diag} \Rightarrow U^\dagger m V^\dagger U = U^\dagger H U U^\dagger V V^\dagger U = M_{diag} = m_{diag}$$

→ Le Lagrangien devient :

$$\mathcal{L} \ni -\bar{u}'_L \underbrace{U^\dagger_{uL}\, m_U\, U_{uR}}_{m_U^{diag}} u'_R \rightsquigarrow m_U^{diag} = diag\{m_u, m_c, m_t\}$$

$$- \bar{d}'_L \underbrace{U^\dagger_{dL}\, m_D\, U_{dR}}_{m_D^{diag}} d'_R \rightsquigarrow m_D^{diag} = diag\{m_d, m_s, m_b\}$$

$$- \bar{\ell}'_L \underbrace{U^\dagger_{\ell L}\, m_L\, U_{\ell R}}_{m_L^{diag}} \ell'_R \rightsquigarrow m_L^{diag} = diag\{m_e, m_\mu, m_\tau\}$$

Avant, on était dans la base des états de saveur (u, d, ℓ).
On est passé dans la base des états physique (u', d', ℓ')
↳ On doit reformuler $\mathcal{L}$ dans la base des états physiques.

↳ Changement de base pour la partie leptonique :

→ Le ν étant sans masse, toute base est une base des états physique : $\nu \equiv U_{\nu L} \nu'_L$. On choisit alors $U_{\nu L} = U_{\ell L}$

Alors : $(\bar{\nu}_L \ \bar{\ell}_L)\, i\not{D} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix} = (\bar{\nu}'_L U^\dagger_{\ell L} \ \ \bar{\ell}'_L U^\dagger_{\ell L})\, i\not{D} \begin{pmatrix} U_{\ell L}\nu'_L \\ U_{\ell L}\ell'_L \end{pmatrix}$

$\not{D} U_{\ell_L} = 0$

$= (\bar{\nu}'_L \ \bar{\ell}'_L)\, i\not{D} \begin{pmatrix} \nu'_L \\ \ell'_L \end{pmatrix}$

De plus, $\bar{\ell}_R i\not{D} \ell_R = (\bar{e}_R \ \bar{\mu}_R \ \bar{\tau}_R)\, i\not{D} \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} = \bar{\ell}_R U^\dagger_{\ell R}\, i\not{D}\, U_{\ell R} \ell_R$

$= \bar{\ell}_R i\not{D} \ell_R$

On trouve que le terme cinétique est invariant pour les leptons car on peut prendre $U_{\nu L} = U_{\ell L}$! toutes les interactions de jauge sont diagonales en saveurs.

↳ Changement de base pour la partie des quarks :

→ Au contraire des leptons, on a $U_{dL} \neq U_{dL}$. On ne peut pas prendre $U_{dL} = U_{uL}$ car l'un fixe l'autre : la diag. de la matrice m_U n'est pas indépendante de celle de la matrice m_D

↳ les CN sont diagonaux en saveur, mais pas les CC.

→ Courants neutres :

Ils sont invariants car les termes dans les courants sont tjs de la forme $\bar{f}_{iL} \cdots f_{iL}$; Jamais de la forme $\bar{f}_{iL} \cdots f_{eL}$

ex : $\bar{u}_L \gamma_\mu u_L \mapsto \bar{u}_L' U_{uL}^\dagger \gamma_\mu U_{uL} u_L' = \bar{u}_L' \gamma_\mu u_L'$

→ Courants chargés :

Sous ce changement de base, les CC se transforment selon :

$$\mathcal{L} \ni \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L \gamma_\mu d_L) W^{+\mu} + h.c.$$

$$\mapsto \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L' \gamma_\mu \underbrace{(U_{uL}^\dagger U_{dL})}_{\neq \mathbb{1}} d_L') W^{+\mu} + h.c.$$

DEF | On définit la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa V_{CKM} selon $V_{CKM} \equiv U_{uL}^\dagger U_{dL}$

→ On obtient ainsi 3 bases :

① la base des états de saveurs $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$ dans laquelle m_U et m_D sont non-diagonales

② la base des états propres de masse u', c', t', d', s', b'.

ex : un K^+ est un état $\bar{u}'s'$, pas un état $\bar{u}s$

③ la base des partenaires de u', c', t' dans le couplage des CC

$$\begin{pmatrix} d_L'' \\ s_L'' \\ b_L'' \end{pmatrix} \equiv V_{CKM} \begin{pmatrix} d_L' \\ s_L' \\ b_L' \end{pmatrix} = U_{uL}^\dagger U_{dL} \begin{pmatrix} d_L' \\ s_L' \\ b_L' \end{pmatrix}$$

. Explicitement, les doublets sont :

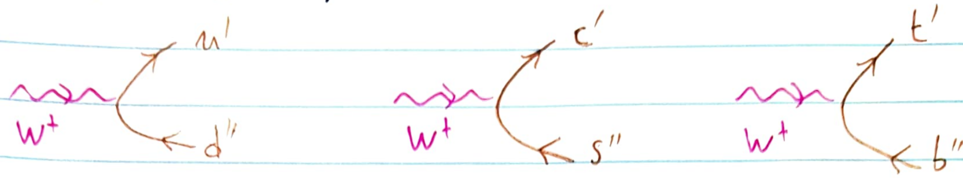
$$\begin{pmatrix} u_L' \\ d_L'' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_L' \\ s_L'' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} t_L' \\ b_L'' \end{pmatrix}.$$

?

Ces doublets sont des doublets de $SU(2)_L$:

$$\begin{pmatrix} u'_L \\ d''_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^\dagger_{uL}\, u_L \\ U^\dagger_{uL}\, d_L \end{pmatrix} = U^\dagger_{uL} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$$

Ils correspondent aux CC :



→ Pour les leptons, aucun de changement de saveur nulle part !

$U(1)_{L_e} \rightsquigarrow n_e + n_{\nu_e} - n_{\bar{e}} - n_{\bar{\nu}_e} = cst = L_e$

$U(1)_{L_\mu} \rightsquigarrow n_\mu + n_{\nu_\mu} - n_{\bar{\mu}} - n_{\bar{\nu}_\mu} = cst = L_\mu$

$U(1)_{L_\tau} \rightsquigarrow n_\tau + n_{\nu_\tau} - n_{\bar{\tau}} - n_{\bar{\nu}_\tau} = cst = L_\tau$

5.3 Mécanisme de GIM

Thm (FCNC) Les quarks ne peuvent pas changer de saveur lors d'une interaction à courant neutre :
"No Flavour Changing Neutral Currents"

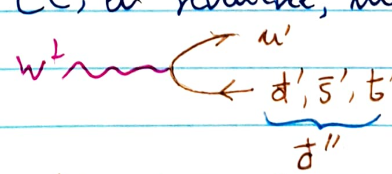
→ On a 

mais 

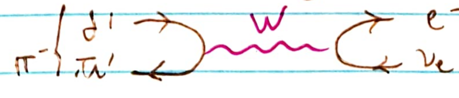
interdit

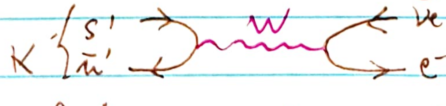
DEF Le mécanisme de Glashow-Iliopoulos-Maiani est le nom donné à cette absence de FCNC pour n'importe quel nombre de génération. C'est une conséquence générale du fait que le générateur T^3 de $SU(2)$ commute avec les rotations dans l'espace des saveurs.

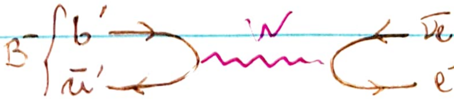
→ Les CC, en revanche, mélangent les générations de quarks :



ex :

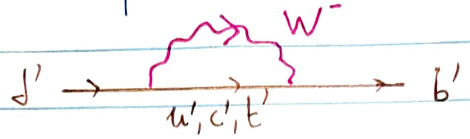






↳ A l'ordre des boucles, les CC permettent des changements de saveurs pour des quarks de même charge :

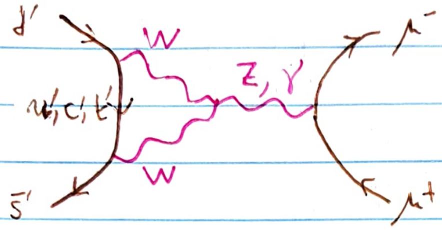
ex :

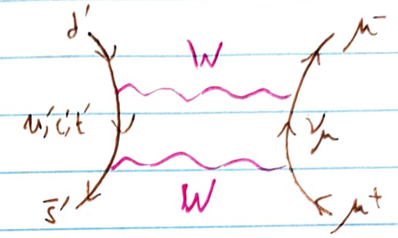


⇒ la désintégration $K^0 \to \mu^+\mu^-$ est alors autorisée mais seulement à l'ordre 1-loop (minimum) :

→ interdit :

→ Autorisés :





→ Remarque :

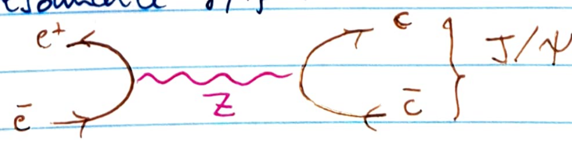
Lors de la découverte du mécanisme de GIM, seuls 3 quarks étaient connus : u, d, s. Seuls deux d'entre eux pouvaient composer un doublet. On avait $\begin{pmatrix} u_L' \\ d_L' \cos\theta_c + s_L' \sin\theta_c \end{pmatrix}$ le doublet, et

$-d' \cos\theta_c + s_L' \cos\theta_c$ le singlet. Dans ce cas, on aurait eu des FCNC au tree-level et $K^0 \to \mu^+\mu^-$ aurait été plus large.

⇒ Il fallait un 4ᵉ quark pour former un 2ᵉ doublet :

$\begin{pmatrix} c_L' \\ -d_L' \cos\theta_c + s_L' \sin\theta_c \end{pmatrix}$. Dans ce cas, pas de FCNC (pas de vertex $Z \to d'\bar{s}'$) et donc $K^0 \to \mu^+\mu^-$ très supprimé.

↳ Le quark charm c découvert en 1974 dans la résonance J/ψ :



5.4 Paramétrisation de V_{CKM}

→ La matrice $V_{CKM} \equiv U_{uL}^{\dagger} U_{dL}$ est une matrice unitaire 3×3 et complexe.

18 paramètres − 6 pour que $V_{ij}^{\dagger} V_{jk} \underset{i=k}{=} \delta_{ik}$ − 3 pour que $V_{ij}^{\dagger} V_{jk} \underset{i\neq k}{=} 0$

A priori, on a 6 phases et 3 angles

Cependant, les rotations entre ≠ quarks sont interdites :

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\{e^{i\phi_u}, e^{i\phi_c}, e^{i\phi_t}\} \begin{pmatrix} u'' \\ c'' \\ t'' \end{pmatrix} \\ \text{et } \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\{e^{i\phi_d}, e^{i\phi_s}, e^{i\phi_b}\} \begin{pmatrix} d'' \\ s'' \\ b'' \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{même phase pour les champs L et R.}$$

→ Le $\mathcal{L}$ ne possédant que des termes en $\bar{q}_{iL} \cdots q_{iL}$, $\bar{q}_{iR} \cdots q_{iR}$ et $\bar{q}_{iL} \cdots \bar{q}_{iR}$, il est invariant sous rephasage, sauf le terme CKM :

$$\mathcal{L} \ni \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}_L''' \ \bar{c}_L''' \ \bar{t}_L'''\right) \begin{pmatrix} e^{-i\phi_u} & & \\ & e^{-i\phi_c} & \\ & & e^{-i\phi_t} \end{pmatrix} \cdot V_{CKM} \cdot \gamma_\mu \cdot \begin{pmatrix} e^{i\phi_d} & & \\ & e^{i\phi_s} & \\ & & e^{i\phi_b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L''' \\ s_L''' \\ b_L''' \end{pmatrix}$$

La matrice se transforme comme :

$V_{CKM} \mapsto V'_{CKM} = \mathrm{diag}(e^{-i\phi_t}, e^{-i\phi_c}, e^{-i\phi}) . V_{CKM} . \mathrm{diag}(e^{i\phi_d}, e^{i\phi_s}, e^{i\phi_b})$

↳ On peut éliminer 5 phases !

Si $\phi_u = \phi_c = \phi_t = \phi_b = \phi_s = \phi_d$; $\mathbb{1} e^{-i\phi} . V_{CKM} . e^{i\phi} \mathbb{1} = V_{CKM}$

→ On prend alors la 1e ligne, 1e colonne réelles :

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix}$$

↳ Si $\delta \neq 0$, il y a violation de CP dans le modèle standard.