CH4 BRISURE SPONTANEE DE SYMETRIE

4.1 Introduction : Ferromagnétisme

→ Supposons un terme de l'Hamiltonien d'interaction de spins entre atomes : $H \ni -c \sum_{i,j} \vec{S_i} \cdot \vec{S_j}$ (Interaction d'échange d'Heisenberg)
↳ Il y a une symétrie $SO(3)$ globale : la rotation globale de tout les spins $\vec{S_i}$ laisse H inchangé.

↳ La configuration d'énergie minimale H_{min} où tout les spin sont allignés brise la symétrie $SO(3)$ car apparait une direction privilégiée.

⊙ Haute température : $T \gg H_{min}$

→ L'énergie cinétique des atomes est bcp plus grande que celle associée à l'interaction des spins.
↳ On a une configuration aléatoire des spins $\vec{S_i}$ et donc une symétrie $SO(3)$:

$$Z = \sum_{\text{configurations}} \exp\{-\beta H\} \sim 1 \quad \text{pour } \beta H \ll 1$$

→ Entropie liée aux spins maximale.

⊙ Basse température : $T \ll H_{min}$

→ On observe une transition de phase : la symétrie $SO(3)$ se brise spontanément en $SO(2)$ (← rotation autour des axes des spins allignés)

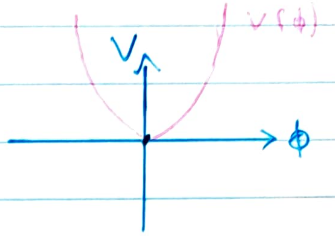
→ La distribution $e^{-\beta H}$ est piquée autour de H_{min}

→ La direction de l'allignement des spins est indéterminée : c'est un reste de la sym. $SO(3)$. La physique est similaire dans toute les direction, modulo une rotation.

4.2 Symétrie discrète : cas d'un champ scalaire réel $\phi(x)$

→ On considère le Lagrangien et le potentiel suivant :
$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi)$ avec $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$

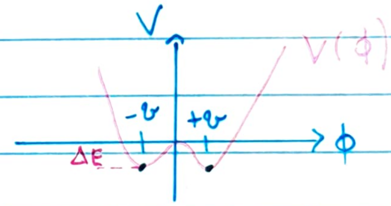
↳ On a la symétrie discrète $\mathbb{Z}_2$: $\mathcal{L}(\phi) \mapsto \mathcal{L}(-\phi) = \mathcal{L}(\phi)$
On a alors 2 cas possibles.



ⓘ Cas où $\mu^2 > 0$:

→ L'Hamiltonien est donné par :
$$H = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$$

↳ $H(\phi_{min}) = H_{min}$ minimum lorsque $\phi(x^\mu) = 0 \ \forall x, t$
↳ Le 1e état excité est un petit oscillation autour du vide : une particule ϕ de masse μ.



ⓘ Cas où $\mu^2 < 0$:

→ Minimisons $V(\phi)$: $0 \overset{!}{=} V'(\phi_{min}) = \mu^2\phi_m + \lambda\phi_m^3 \Leftrightarrow \phi_{min}^2 \equiv v^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda}$

↳ Le potentiel $V(\phi)$ est minimal pour 2 valeurs du champs : $\pm v$.
On écrit $\langle\phi\rangle^2 = -\mu^2/\lambda$

à check → A haute T, $\Delta E = \mu^4/4\lambda = V(0) - V(v)$ est négligeable ⇒ symétrique sous $\mathbb{Z}_2$. Mais à basse T, la configuration du champ est $\phi = v$ ou $\phi = -v$: il y a brisure spontanée de $\mathbb{Z}_2$ (ou BSS pour les intimes).

→ Pour connaître le 1e état excité, il faut développer le Lagrangien autour du vide et ainsi obtenir le spectre d'excitation.
↳ On regarde $\mathcal{L}$ autour de $\phi' \equiv \phi - v \Leftrightarrow \phi = \phi' + v$
De cette manière, $\langle\phi'\rangle = \langle\phi\rangle - v = v - v = 0$

$\phi \mapsto \phi' + v$

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial\phi')^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi'+v)^2 - \frac{1}{4}\lambda(\phi'+v)^4$$

$$= \frac{1}{2}(\partial\phi')^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi'^2 + 2\phi' v + v^2]$$

$$-\frac{1}{4}\lambda(\phi'^4 + 6\phi'^2 v^2 + 4\phi'^3 v + 4\phi' v^3 + v^4)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial\phi')^2 - \frac{\phi'^2}{2}(\mu^2 + 3\lambda v^2) - \phi'^3 \lambda v - \frac{\lambda}{4}\phi'^4$$

$$= \frac{1}{2}(\partial\phi')^2 - \frac{\phi'^2}{2}(\underbrace{\mu^2 + 3\lambda v^2}_{= -2\mu^2}) - \phi'^3 \lambda v - \frac{\lambda}{4}\phi'^4 + \phi'.(\dots)$$

0 si a $\partial_\phi V = 0$ $\Leftrightarrow \phi' = 0$

$$= \frac{1}{2}(\partial\phi')^2 - \frac{m^2_{\phi'}}{2}\phi'^2 - \phi'^3 \lambda v - \frac{\lambda}{4}\phi'^4$$

↳ La 1e excitation est un boson scalaire de masse $m^2_{\phi'} = 2|\mu^2| = \left.\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi^2}\right|_{\phi'=0}$ avec une interaction 3-linéaire en plus de l'interaction 4-linéaire deja présente.

⊙ Resumé :

1) BSS $\mathbb{Z}_2$: la symétrie du vide (pas $\mathbb{Z}_2$) est différente de la symétrie du Lagrangien ($\mathbb{Z}_2$)

2) Le spectre est different en cas de BSS ($m^2 = -2\mu^2 > 0$ avec $\mathrm{sgn}(\mu^2) = -1$) ou en absence de BSS ($m^2 = \mu^2 > 0$ avec $\mathrm{sgn}(\mu^2) = +1$).

3) En cas de BSS, on choisi une valeur arbitraire du vide (v ou $-v$), mais la physique est indépendante de ce choix.

4) Le fait que $\langle\phi\rangle \neq 0$ ne brise pas l'invariance de Lorentz, car ϕ est un scalaire ($\langle\psi\rangle \neq 0$ briserait Lorentz).

4.3 Symétrie globale abelienne : BSS avec $\phi \in \mathbb{C}$

→ Il s'agit à present d'une symétrie continue $U(1)$: $\phi \mapsto e^{-i\theta}\phi$.
On considère le champ complexe :

$$\phi(x) \equiv (\phi_1(x) + i\,\phi_2(x))/\sqrt{2}$$

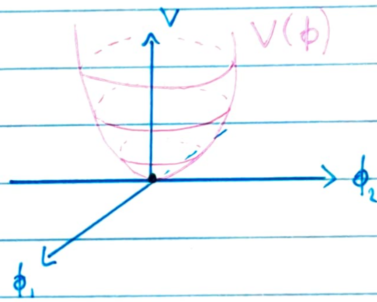
et un potentiel général invariant sous $U(1)$:

$$V(\phi) \equiv \mu^2 \phi^+\phi + \lambda(\phi^+\phi)^2$$
$$= \frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2$$

Puisque $U(1) \simeq SO(2)$, on a de manière équivalente :

$$\phi(x) \mapsto e^{-i\theta}\phi(x) \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\phi_1'\\ \phi_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta \\ -s_\theta & c_\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$$

A nouveau, on distingue 2 cas :

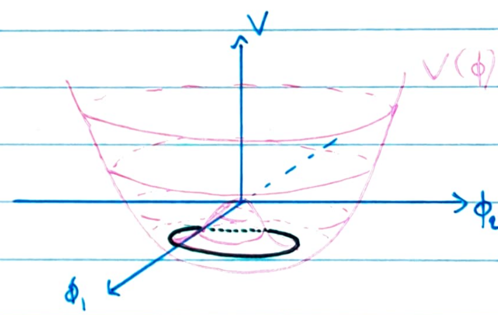


⊙ Cas où $\mu^2 > 0$:

→ Minimum unique de V en $\phi_1 = \phi_2 = 0 \ \forall x^\mu$

→ Le 1^e^ état excité donne 2 bosons scalaires réels de masse

$$m^2_{\phi_1} = m^2_{\phi_2} = \mu^2 = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i^2}\right|_{\phi_i}$$



⊙ Cas où $\mu^2 < 0$:

→ Minimisons $V(\phi)$:

$$\left.\begin{aligned} &\to \frac{\partial V}{\partial \phi_1} = \mu^2\phi_1 + \lambda\phi_1(\phi_1^2+\phi_2^2) \overset{!}{=} 0 \\ &\frac{\partial V}{\partial \phi_2} = \mu^2\phi_2 + \lambda\phi_2(\phi_1^2+\phi_2^2) \overset{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} \quad \phi_1^2 + \phi_2^2 \overset{\circledast}{=} -\frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2 \quad \text{cercle}$$

↳ Il y a une infinité d'états du vide dégénérés. Mais à la transition de phase, seulement l'un d'entre eux (1 direction) est sélectionné
⇒ $U(1)$ sera brisé.

→ On considère la configuration du vide suivante :

$$\langle \phi_1 \rangle = v \qquad \langle \phi_2 \rangle = 0 \qquad \text{qui respecte bien } \circledast$$

Calculons les perturbations autours de $\phi_1' = \phi_1 - v$ et $\phi_2' = \phi_2$:

$$V(\phi_1', \phi_2') = \dots = \underbrace{\frac{1}{2}\mu^2 v^2 + \frac{\lambda}{4} v^4}_{= C} + \underbrace{(\mu^2 v + \lambda v^3)}_{=0} \phi_1' + \frac{1}{2} \underbrace{(\mu^2 + 3\lambda v^2)}_{= -2\mu^2} \phi_1'^2$$

$$+ \frac{1}{2} \underbrace{(\mu^2 + \lambda v^2)}_{=0} \phi_2'^2 + \lambda v \phi_1' (\phi_1'^2 + \phi_2'^2) + \frac{\lambda}{4} (\phi_1'^2 + \phi_2'^2)^2$$

$$= C + \frac{1}{2} m_{\phi_1'}^2 \phi_1'^2 + \lambda v \phi_1' \underbrace{(\phi_1'^2 + \phi_2'^2)}_{\text{terme 3-linéaire}} + \frac{\lambda}{4} \underbrace{(\phi_1'^2 + \phi_1'^2)^2}_{\text{terme 4-linéaire}}$$

↳ On obtient :

ϕ_1' : $m_{\phi_1'}^2 = -2\mu^2 > 0$ dans la direction radiale puisque $m_{\phi_1'}^2 = \partial^2 V / \partial \phi_1'^2 |_{\langle\phi\rangle}$ avec $\langle \phi \rangle = (v, 0)$

ϕ_2' : $m_{\phi_2'}^2 = 0$ dans la direction tangentielle. C'est un boson de Goldstone

↳ Le potentiel V a une direction plate (sur le cercle). C'est un reste de $SO(2) \xrightarrow{BSS} U(1)$

4.4 Symétrie Locale abélienne

→ On considère tjs le champ scalaire complexe $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$, mais avec un $U(1)$ local : $\phi \mapsto \phi' \equiv e^{-i\theta(x)} \phi$. On doit alors rendre covariante la dérivée. Le Lagrangien est celui de la QED scalaire :

$$\mathcal{L} = (D\phi)^2 - V(\phi) - \frac{1}{4} F^2$$

$$= ([\partial_\mu - ieA_\mu]\phi)^\dagger (\partial^\mu + ieA^\mu)\phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

→ Il n'y a brisure spontanée de symétrie $SO(2) \simeq U(1)$ seulement dans le cas où $\mu^2 < 0$. On choisit $\phi_1 = v$ et $\phi_2 = 0$ et on développe V autour de $\langle \phi_1 \rangle = v$ et $\langle \phi_2 \rangle = 0$

→ Plaçons nous dans des coordonnées polaires :

$$\phi = \sqrt{\frac{\phi_1^2 + \phi_2^2}{2}} \exp\{i(\xi/v)\} = |\phi| e^{i(\xi/v)} \qquad \text{2 champs réels } (|\phi|, \xi)$$

Alors $\langle |\phi| \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}$ et $\langle \xi \rangle = 0$

↳ Autour du vide, on aura : $\phi \overset{\circledast}{=} \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} e^{i(\xi/v)}$

où $\eta \equiv$ perturbation autour du vide et $\langle \eta \rangle = \langle \xi \rangle = 0$

Le Lagrangien devient :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\mu^2}{2}(\eta+v)^2 - \frac{\lambda}{4}(\eta+v)^4$$

$$+ \left[(\partial_\mu - ieA_\mu)\left(\frac{\eta+v}{\sqrt{2}}\right) e^{-i\xi/v} \right] \left[(\partial^\mu + ieA^\mu)\left(\frac{\eta+v}{\sqrt{2}}\right) e^{i\xi/v} \right]$$

$$= \dots = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\eta^2}{2} \overbrace{(\mu^2 - 3\lambda v^2)}^{= -2\mu^2 = m_\eta^2} + \frac{1}{2}\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi$$

$$- eA_\mu \partial^\mu \xi \cdot v + \overbrace{\frac{e^2}{2} v^2}^{= \frac{1}{2} m_A^2} A_\mu A^\mu + (3\text{-lin termes}) + (4\text{-lin termes})$$

↳ On obtient :

η : un terme cinétique $(\partial \eta)^2$ et une masse $m_\eta^2 = -2\mu^2 > 0$

ξ : un terme cinétique $(\partial \xi)^2$ et une masse nulle $m_\xi^2 = 0$. C'est un boson de Goldstone : le vide possède une direction plate à cause de la symétrie $U(1) \xleftarrow{BSS} SO(3)$

A_μ : le boson devient massif ! $m_A^2 = e^2 v^2$. Cependant, il y a un terme de mélange $A \cdot \partial \xi \rightsquigarrow$ pas dans la base des états physique.

→ Effectuons une transfo de jauge $U(1)$ locale sur notre Lagrangien $\mathcal{L}$:

$\phi \mapsto \phi' \equiv e^{-i\alpha(x)} \phi$. On choisi $\alpha = \xi/v$. Ainsi, $\phi' = e^{-i\xi/v} \phi \overset{\circledast}{=} (\eta + v)/\sqrt{2} = |\phi|$

Alors :

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha = A_\mu - \frac{1}{ev} \partial_\mu \xi$$

↳ $\mathcal{L} = \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial \cdot \eta)^2 + \frac{1}{2}(-2\mu^2)\eta^2 + \frac{e^2 v^2}{2} A'_\mu A'^\mu$

$$+ \frac{e^2}{2} A'_\mu A'^\mu (2\eta v + \eta^2) - \lambda v^2 \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \text{cst}$$

↳ On obtient :

A'_μ : il n'y a plus de terme de mélange, et $m_{A'}^2 = e^2 v^2$. Il y a donc 3 polarisations possibles (3 dof)

η : massif et scalaire : 1 dof

ξ : Il n'y a plus de ξ dans $\mathcal{L}$! Il a été absorbé dans

3 dof ← $A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev} \partial_\mu \xi$ → 2+1 dof

$\Rightarrow$ Le boson de Goldstone de la théorie U(1) global disparaît dans A_μ "en le rendant massif". C'est un would-be goldstone.

Comptage des dof:

→ Avant BSS :

2 scalaires réels ($|\phi|, \eta$) et un boson de jauge sans masse A_μ

$\Rightarrow$ 2 + 2 dof

→ Après BSS :

1 scalaire réel η et un boson de jauge massif avec 3 polarisations (2 transverses A_μ et 1 longitudinale $\partial_\mu \zeta$)

$\Rightarrow$ 1 + 3 dof

4.5 Symétrie locale non-abélienne

→ On considère un doublet de SU(2) : $\phi \equiv \begin{pmatrix} (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2} \\ (\phi_3 + i\phi_4)/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

avec le Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$$

où la dérivée covariante est donnée par :

$$D_\mu \phi = \{ \partial_\mu - ig \frac{\tau_a}{2} \cdot W^a_\mu \} \phi$$

→ Pour avoir un BSS, on considère le cas où $\mu^2 < 0$. Minimisons V :

$$\rightarrow V = \mu^2 \phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 = \frac{\mu^2}{2}(\Sigma \phi_i^2) + \frac{\lambda}{4}(\Sigma \phi_i^2)^2$$

$$\rightarrow \partial_{\phi_j} V = \mu^2 \phi_j + \lambda(\Sigma \phi_i^2) . \phi_j \overset{!}{=} 0 \iff \frac{\Sigma \phi_i^2}{2} = \frac{-\mu^2}{2\lambda} = \phi^\dagger\phi = \frac{v^2}{2}$$

On prend $v^2 = -\mu^2/\lambda$

→ Choix de la configuration de vide : on prend $\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$

On a bien $\phi^\dagger \phi |_{\langle\phi\rangle} = \frac{1}{2} v^2$.

↳ En coord. polaires : $\phi(x) = \exp\{ i \frac{\tau_a}{2} . \frac{2\zeta^a}{v} \} \begin{pmatrix} |\phi_1 + i\phi_2|/\sqrt{2} \\ |\phi_3 + i\phi_4|/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Autour du vide :

$$\phi(x)|_{\langle\phi\rangle} = \exp\{ i \tau_a . \zeta^a / v \} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

→ Transformation de jauge :

→ On choisit une transformation de jauge unitaire :

$$\phi'(x) = U(x)\,\phi(x) = \exp\{-i\,\tau\cdot\xi/v\}\,\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ (v+\eta)/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

→ Comment les champs de jauge se transforment-ils ?

↳ $\frac{\tau^a}{2}\cdot W'^a_\mu = U\,\frac{\tau}{2}\cdot W_\mu\,U^+ - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^+$. Alors $D'_\mu\phi' = U D_\mu \phi$

et $F'^a_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}_a = F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$

→ Le $\mathcal{L}$ se transforme donc selon :

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi')^+(D^\mu\phi') - \frac{\mu^2}{2}(\eta+v)^2 - \frac{\lambda}{4}(\eta+v)^4 - \frac{1}{4}F'^2$$

$$= \left([\partial_\mu + ig\,\tfrac{\tau}{2}\cdot W'_\mu]\,\phi'^+\right)\left([\partial^\mu - ig\,\tfrac{\tau}{2}\cdot W'^\mu]\,\phi'\right) - \frac{\mu^2}{2}(\eta^2+v^2+2\eta v)$$

$$-\frac{\lambda}{4}(\eta^4 + 4\eta^3 v + 6\eta^2 v^2 + 4\eta v^3 + v^4) - \frac{1}{4}F'^a_{\mu\nu}F'^{a\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\,\partial^\mu\eta + \frac{g^2}{8}(0 \;\; \eta+v)(\tau\cdot W'_\mu)(\tau\cdot W'^\mu)\begin{pmatrix} 0 \\ \eta+v \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\eta^2}{2}\underbrace{(\mu^2 + 3\lambda v^2)}_{=-2\mu^2} - \eta\underbrace{(\mu^2 v + \lambda v^3)}_{=v(\mu^2-\mu^2)=0} - \lambda v\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 - \frac{1}{4}F'^2$$

$$= \frac{1}{2}(\partial\eta)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{gv}{2}\right)^2(W'^a_\mu W'^{a\mu}) - \frac{1}{2}(-2\mu^2)\eta^2 - \lambda v\eta^3$$

$$-\frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \frac{g^2 v^2}{8}(2\eta v + \eta^2)(W'^a_\mu W'^{a\mu}) - \frac{1}{4}F'^2$$

↳ On obtient,

→ Champ η : se propage $\partial_\mu\eta\,\partial^\mu\eta$ et est massif $m_\eta^2 = -2\mu^2 = \frac{v^2}{2\lambda}$: 1 dof

DEF Le boson scalaire massif η est le boson de Brout-Englert-Higgs

→ W_μ^a : les 3 bosons de jauge ont acquis une masse : $m_W^2 = \left(\frac{gv}{2}\right)^2$

↳ On a donc 3.3 = 9 dof.

→ ξ_a : Les 3 ξ_a ont été absorbés par les W_μ^a pour les rendre massifs. Ils n'ont pas de terme cinétique, pas d'interaction.
On a $\frac{\tau}{2}\cdot W'_\mu = U \frac{\tau}{2}.W_\mu . U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}$ où $U = U(\xi)$

⊙ Comptage des dof :

→ Avant BSS :
3 W_μ sans masse et 4 ϕ_i dans ϕ
$\Rightarrow 3 . 2 + 4 = 10$ dof
→ Après BSS : 3 W'_μ massifs et 1 η
$\Rightarrow 3 \cdot 3 + 1$ dof $= 10$ dof

⊙ Bosons de Goldstone et bosons de jauge massifs :

→ Les 3 $\xi^a(x)$ sont des bosons de Goldstone : ils sont sans masses (sans la transfo de jauge, ils n'auraient pas été absorbés dans les A'_μ).
↳ En effet, le min du potentiel $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 = v^2/2$ est une 3-sphère S^3, et a 3 directions tangentielles (plates)
Pour la sym. abélienne, on avait $U(1) \rightsquigarrow S^1 \equiv$ cercle
On a : $\langle\phi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \mapsto \langle\phi'\rangle = U(x)\begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\forall U \in SU(2)_{\text{local}}$

avec $V(\langle\phi\rangle) = V(\langle\phi'\rangle)$. La transfo de jauge unitaire transforme les $\xi^a(x)$ en "would-be Goldstone".

→ Le champ $\eta(x)$ est la direction radiale selon laquelle le potentiel n'est pas plat : $\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}\right|_{\langle\phi\rangle} = m_\eta^2 \neq 0$

→ Pourquoi obtient-on 3 bosons de jauge massifs ?
1) En général, considérons n champs $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$ avec $\phi_j \in \mathbb{R}$
Alors :
$$\mathcal{L} \ni \frac{1}{2} D_\mu \phi D^\mu \phi = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_j + i g T^a_{jk} A^a_\mu \phi_k\right)\left(\partial^\mu \phi_j - i g T^a_{jl} A^{a\mu} \phi_l\right)$$
ex : $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ et $T^a = \begin{pmatrix} T^a_{11} & T^a_{12} \\ T^a_{21} & T^a_{22} \end{pmatrix}$

2) Or, pour n'importe quelle transformat° de jauge, on a :

$$V(\langle\phi\rangle) = V(\langle\phi'\rangle) = V(U\langle\phi\rangle)$$

$$\Leftrightarrow \delta V = \frac{\partial V}{\partial \phi_i}\delta\phi_i \quad \text{Or, } U = 1 + i\epsilon^a T^a \Leftrightarrow \delta\phi_j = i\epsilon^a T^a_{jk}\phi_k$$

$$= i\epsilon^a \frac{\partial V}{\partial \phi_i} T^a_{ij}\phi_j \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial \phi_j} T^a_{jk}\phi_k = 0 \quad \Big\| \frac{\partial}{\partial \phi_\ell}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial\phi_j\partial\phi_\ell} T^a_{jk}\phi_k + \frac{\partial V}{\partial\phi_j} T^a_{j\ell} = 0 \quad \Big|_{\langle\phi\rangle = v}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial\phi_j\partial\phi_\ell}\Big|_{\langle\phi\rangle} T^a_{jk} v_k \overset{⊛}{=} 0$$

3) Une brisure spontanée de symétrie fait passer d'un groupe de jauge G avec n générateurs à un groupe G' avec n' générateurs, tel que les n' générateurs de G' laisse $\langle\phi\rangle$ invariant : $T^a_{ij} v_j = 0$ avec $a = 1, 2, \dots, n'$., et $T^b_{ij} v_j \neq 0$ pour $b = 1, 2, \dots, n-n'$.

4) Ainsi, ⊛ $\Rightarrow$ la matrice $\partial^2 V/\partial\phi_j\partial\phi_\ell$ possède $n-n'$ valeurs propres nulles. $\Leftrightarrow$ $n-n'$ bosons de masse nulle (goldstone bosons).

$$V(\phi_j) = V(v_j) + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_j\partial\phi_\ell}\Big|_{\phi_j = v_j}}_{n-n' \text{ val. propre} = 0}\underbrace{(\phi_j - v_j)}_{\phi_j'}\underbrace{(\phi_\ell - v_\ell)}_{\phi_\ell'} \quad \text{par ex : } \phi_\ell' = \eta$$

Thm (de Goldstone) Soit une théorie des champs avec une symétrie globale continue d'un groupe G. Une brisure spontanée de symétrie de G vers un sous-groupe $H \subsetneq G$ implique la présence dans le spectre de la théorie d'au moins une particule sans masse, appelée boson de Goldstone.

En haut, on aurait $n-n'$ bosons de Goldstone et donc $n-n'$ bosons de jauge rendu massifs. Pour $G = SU(2) \to G' = \phi$, $n=3$ et $n'=0$: 3 W^μ massifs.

5) Les $n-n'$ bosons de jauge massifs ont pour masse :

$$\mathcal{L} \ni -\frac{g^2}{2}(T^a_{ij} v_j)(T^b_{ik} v_k) A^a_\mu A^{b\mu} \quad \leftarrow \text{vient de } (D_\mu\phi_i)^2$$

$$\equiv -\frac{1}{2} M^2_{ab} A^a_\mu A^{b\mu}$$ où M_{ab} est la matrice de masse des bosons de jauge, avec $n-n'$ vap $\neq 0$

4.6 BSS de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ vers $U(1)_{em}$

→ On considère un doublet scalaire complexe : $\phi = \begin{pmatrix} (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2} \\ (\phi_3 + i\phi_4)/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Le Lagrangien est donné par :

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_{GWS} + (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - V(\phi)$$

$$= -\frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \sum_{s = e,\mu,\tau} \{ \bar{L}_s i \not{D} L_s + \bar{s}_R i \not{D} s_R \}$$

$$+ (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - \left(\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \right)$$

où $\mu^2 < 0$ et $D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\tau_a}{2} W^a_\mu - ig' \frac{Y}{2} B_\mu$

⊙ Hypercharge du doublet scalaire :

→ On suppose $Y(\phi) = 1$, et on choisit la config $\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

↳ Dans ce cas, $T_3(\langle \phi \rangle) + \frac{Y}{2} \langle \phi \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 = Q(\langle \phi \rangle)$

Ainsi, le vide $\langle \phi \rangle$ préserve un $U(1)$ généré par $Q = T_3 + Y/2$.

On appelle ce $U(1)$: $U(1)_{em}$. Or, si $Q = T_3 + Y/2$, alors le doublet leptonique L_s est de la forme $L_e = \begin{pmatrix} \nu_{sL} \\ s_L \end{pmatrix}$

↳ En effet, $Q \langle \phi \rangle = \{ T_3 + \frac{Y}{2} \} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_2 \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La vev du Higgs est invariante sous QED ⇒ pas de couplage entre le photon et le Higgs dans le vide. Donc, il ne peut pas y avoir, dans le terme cinétique du Higgs, de terme qui brise $U(1)_{em}$ lorsque celui-ci prend une vev.

→ Si on avait pris $\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, avec la même hypothèse ($Y(\phi) = 1$), le $U(1)$ conservé aurait été généré par $-T_3 + Y/2$, et les doublets leptoniques auraient pris la configuration $L_s = \begin{pmatrix} s_L^- \\ \nu_{sL} \end{pmatrix}$

⊙ Effet sur le Lagrangien :

Sous transformation $\begin{cases} \phi \mapsto \phi' = U\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ (v+h)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \langle\phi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ W \mapsto W' \end{cases}$, le

Lagrangien devient :

$$\mathcal{L} \ni (D'_\mu \phi')^\dagger (D'_\mu \phi')$$

$$\mathcal{L}\big|_{\langle\phi\rangle} = \frac{1}{2}(0 \ v)\left(\frac{g}{2}\tau^a W'^a_\mu + \frac{g'}{2}B_\mu\right)\left(\frac{g}{2}\tau^a W'^{a\mu} + \frac{g'}{2}B^\mu\right)\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}(0 \ v)\begin{bmatrix} gW'^3_\mu + g'B_\mu & g(W'^1_\mu - iW'^2_\mu) \\ g(W'^1_\mu + iW'^2_\mu) & -gW'^3_\mu + g'B_\mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} gW'^\mu_3 + g'B^\mu & g(W'^\mu_1 - iW'^\mu_2) \\ g(W'^\mu_1 + iW'^\mu_2) & -gW'^\mu_3 + g'B^\mu \end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$$

$$= \frac{v^2}{8}\left\{ g^2\left((W1)^2 + (W2)^2\right) + \left(-gW'^3_\mu + g'B_\mu\right)^2 \right\}$$

$$= \frac{g^2v^2}{4} W'^+_\mu \cdot W'^{-\mu} + \frac{(g^2+g'^2)v^2}{8}\left(\frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}W'^3_\mu - \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}B_\mu\right)^2$$

$$= m_W^2 W'^+_\mu \cdot W'^{-\mu} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu$$ rappel : $Z = c_\theta W - s_\theta B = \frac{gW - g'B}{\sqrt{g^2+g'^2}}$

→ On trouve que $m_A^2 = 0$: c'est le boson de jauge qui correspond au générateur de la symétrie non brisée : $U(1)_{em}$. Il est donc sans masse.

→ On a $m_W^2 = \frac{g^2v^2}{4}$ et $m_Z^2 = \frac{g^2+g'^2}{4}v^2$. Ce sont les 3 bosons de jauge correspondant aux 3 générateurs brisés. Ils sont donc massifs.

→ Prédiction du modèle standard : $\frac{m_W^2}{m_Z^2} = \frac{g^2}{g^2+g'^2} = \cos^2\theta_W$

⊙ Courants neutres :

→ Regardons : $\frac{v^2}{8}\left(gW'^3_\mu - g'B_\mu\right)^2 = \frac{v^2}{8}\left(W'^3_\mu \ B_\mu\right)\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W'^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\left(Z_\mu \ A_\mu\right)\begin{pmatrix} m_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix}$$

↳ Le doublet scalaire détermine $(Z_\mu \ A_\mu)$ en fonction de $(W'^3_\mu \ B_\mu)$

→ Après BSS, A_μ, Z_μ deviennent état propres de masse ⟺ états physiques

⊙ Lagrangien dans la nouvelle base :

→ Le Lagrangien electro-faible dans la "base prime" s'écrit :

$$\mathcal{L}_{EW} = -\frac{1}{4}\left\{ (W_{\mu\nu}^{a})^2 + (B_{\mu\nu})^2 \right\} + \sum_s \left\{ \bar{L}_s \, i\cancel{D} L_s + \bar{S}_R \, i\cancel{D} S_R \right\}$$

$$+ (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi)$$

$$= -\frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \sum_s \left\{ \bar{L}_s i\cancel{D} L_s + \bar{S}_R i \cancel{D} S_R \right\}$$

$$+ m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{m_Z^2}{2} Z_\mu Z^\mu + 0 . A_\mu A^\mu$$

$$+ \frac{g}{\sqrt{2}} \left(J_\mu^+ W^{+\mu} + J_\mu^- W^{-\mu} \right) + e J_\mu^{em} A^\mu + \frac{g}{\cos\theta_W} J_\mu^Z Z^\mu$$

$$- \frac{m_\eta^2}{2} \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{\lambda}{4} \eta^4 + \frac{g^2}{4} (2\eta v + \eta^2)(W_\mu^+ W^{-\mu})$$

$$+ \frac{g^2 + g'^2}{8} (2\eta v + \eta^2) . Z_\mu Z^\mu$$

où : → $J_\mu^{em} = \sum_s Q_s \bar{\ell}_s \gamma_\mu \ell_s$

→ $J_\mu^Z = \sum_s \left(g_L^\nu \bar{\nu}_s \gamma_\mu \nu_s + g_L^\ell \bar{S}_L \gamma_\mu S_L + g_R^\ell \bar{S}_R \gamma_\mu S_R \right)$

↳ $g_L = T_3 - Q \sin^2\theta_W$; $g_R = -Q \sin^2\theta_W$

↳ $g_L^\ell = -\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W$; $g_L^\nu = 1/2$; $g_R^\ell = \sin^2\theta_W$

⊙ Remarques :

① Le MS est minimal dans le secteur scalaire : on a un doublet, soit la plus petite rep. non triviale possible

② Le $\mathcal{L}_{EW}$ ne contient que 4 paramètres : g, g', μ^2, λ
(ou g, g', m_η, v ou g, g', v, λ)

→ Les termes indépendants du boson BEH η ne dépendent que de g, g' et v.

DEF | On appelle v l'échelle électro-faible.

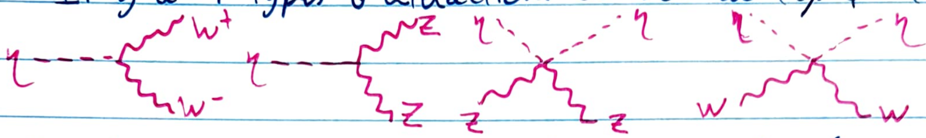
→ L'unique échelle d'énergie du MS est l'échelle électro-faible.

section 3.2 → On a : $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8 m_W^2} = \frac{g^2}{8} \cdot \frac{4}{g^2 v^2} = \frac{1}{2 v^2} \Leftrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}\, G_F}} \simeq 250 \text{ GeV}$

→ A la place de (g, g', v), on peut prendre $(e, M_Z, \tan\theta_W)$ ou encore $(\alpha = e^2/4\pi, G_F, m_Z)$. Beaucoup de processus existent pour tester ces valeurs

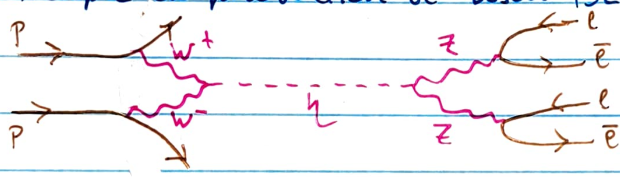
③ Interaction entre η, $W^\pm$ et Z.

Il y a 4 types d'interactions au sein de $(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) \in \mathcal{L}_{EW}$:



Ces intéractions sont fixées par les 4 paramètres (g, g', v, m_η).

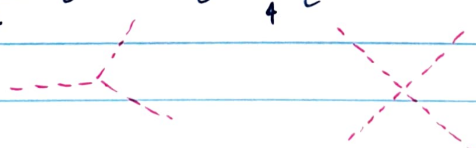
→ Exemple de production de boson BEH au LHC : "W fusion"



④ Secteur purement scalaire :

Au sein du potentiel : $V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$

$= -\frac{m_\eta^2}{2} \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{\lambda}{4} \eta^4$



↳ Termes trilinéaires et 4-linéaires fixé par μ^2 et $\lambda \Leftrightarrow$ par $m_\eta^2 = -2\mu^2 = 2\lambda v^2$ et par $v^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda}$

↳ Difficile à observer.

4.7 Symétrie custodiale

DEF On définit le ρ parameter ρ par :

$$\rho \equiv \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2\theta_W} = 1$$

→ Experimentalement, on trouve $\rho = 1,0008 \pm 0,0017$

→ Ce $\rho = 1$ est dû à la symétrie custodiale $SO(4) \simeq SU(2)_L \otimes SU(2)_R$
$\to SU(2)_V$

En effet, le potentiel scalaire $V(\phi)$ est invariant sous $SO(4)_g$:

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi^2) \mapsto V(O\phi) = -\mu^2 \begin{pmatrix}\phi_1 \\ \vdots \\ \phi_4\end{pmatrix} O^T O \begin{pmatrix}\phi \\ \vdots \\ \phi_4\end{pmatrix} + \dots = V(\phi)$$

$O \in SO(4)$

→ Or, $SO(3) \subsetneq SO(4)$ et lorsque ϕ prend sa valeur dans le vide (vev), $\langle\phi\rangle^t = (0 \;\; 0 \;\; \frac{v}{\sqrt{2}} \;\; 0) \Rightarrow$ l'invariance sous $SO(4)$ est brisée, mais pas celle sous $SO(3)$.

⊙ Avant BSS :

→ le terme $F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$ invariant sous $SO(3)$: $\begin{pmatrix} W_1^\mu \\ W_2^\mu \\ W_3^\mu \end{pmatrix} \xrightarrow{SO(3)} O \begin{pmatrix} W_1^\mu \\ W_2^\mu \\ W_3^\mu \end{pmatrix}$

car les W_j^μ sont sans masse et $SO(3) \Leftrightarrow SU(2)_{L,g}$

→ Le potentiel $V(\phi)$ également invariant sous $SO(3) \subset SO(4)$

⊙ Après BSS :

→ Les champs $F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$ et $(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi)$ développés autours de $\langle\phi\rangle$ sont toujours invariants sous $SO(3)$ pour les W_j^μ massifs, composés des 3 W_j^μ sans masse (bien invariants sous $SO(3)$), ainsi que 3 bosons de Goldstone ϕ_1, ϕ_2, ϕ_4 {également invariants sous $SO(3)$}.

→ On a un $SO(3)_g$ accidentel pour les W_j^μ massifs après BSS

→ En fait, seulement si $g' = 0$ dans $(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi)$, sinon $\exists$ un terme $W_\mu^3 B^\mu$ qui n'est pas invariant sous $SO(3)_g$ puisqu' $\nexists$ $W_\mu^{1,2}B^\mu$.

p39 → ↳ La structure des termes de masse est la suivante :

$$\mathcal{L} \ni \frac{1}{2} \underbrace{m_W^2 \{(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 + (W_\mu^3)^2\}}_{\text{invariant } SO(3) \text{ car pas de } g'} \underbrace{- 2gg'\frac{v^2}{8} W_\mu^3 B^\mu + g'^2 \frac{v^2}{8} B_\mu B^\mu}_{\text{brise } SO(3)}$$

Sous forme matricielle, on a :

$$\mathcal{L} \ni \frac{1}{2} m_W^2 (W_\mu^1)^2 + \frac{1}{2} m_W^2 (W_\mu^2)^2 + \frac{1}{2} (W_\mu^3 \; B_\mu) \overbrace{\begin{pmatrix} m_W^2 & -gg'v^2/4 \\ -gg'v^2/4 & g'^2 v^2/4 \end{pmatrix}}^{\equiv M^2} \begin{pmatrix} W_3^\mu \\ B^\mu \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} m_W^2 \left((W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 \right) + \frac{1}{2} (Z_\mu \; A_\mu) \underbrace{\begin{pmatrix} m_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\equiv M^2_{Diag}} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow U(1)_{em}$

→ Puisque la symétrie custodiale impose que $(M^2)_{W_3 W_3} \overset{!}{=} m_W^2$ et par ailleurs la symétrie $U(1)_{em}$ est non-brisée, on déduit que $\mathrm{tr}(M^2) = \mathrm{tr}(M^2_{diag}) = m_Z^2$ et $\det(M^2) = \det(M^2_{diag}) = 0$

On peut ainsi écrire :

$$\mathcal{L} \ni \frac{1}{2} (W_\mu^3 \; B_\mu) \begin{pmatrix} m_W^2 & m_W \sqrt{m_Z^2 - m_W^2} \\ m_W \sqrt{M_Z^2 - m_W^2} & m_Z^2 - m_W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

rappel : $m_W^2 = g^2 v^2/4$ et $m_Z^2 = (g^2 + g'^2) v^2/4$

⊙ Prédictions :

→ La symétrie custodiale prédit $\cos^2\theta_W = \frac{m_W^2}{m_Z^2}$.

Par ailleurs, on sait que $\cos^2\theta_W = \frac{g^2}{g^2 + g'^2}$. Ainsi :

$$\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2\theta} = \frac{g^2 v^2}{4} \cdot \frac{4}{(g^2+g'^2) v^2} \cdot \frac{g^2 + g'^2}{g^2} = 1$$

→ Beaucoup de théories de physique au-delà du modèle standard sont exclues car elles ne satisfont pas la symétrie custodiale (ie $\rho \neq 1$).

4.8 Masses des leptons

section 29.3.2 Schwartz

① Yukawa interaction :

→ Puisque $Y(\phi) = 1$, on peut rajouter un terme d'interaction supplémentaire autorisé par les symétries : l'interaction de Yukawa

DEF Le terme d'interaction de Yukawa est défini selon

$$\mathcal{L} \ni -y\, \bar{L}_e\, \phi\, e_R - y^*\, \bar{e}_R\, \phi^\dagger L_e$$
$$= -y\, \bar{L}_e\, \phi\, e_R + h.c$$

→ Avant BSS, $\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2} \\ (\phi_3 + i\phi_4)/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Après BSS, on a

$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ (v+\eta)/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. On a dans la vev :

$$\mathcal{L}|_{vev} - y \begin{pmatrix} \bar{\nu}_e & \bar{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (v+\eta)/\sqrt{2} \end{pmatrix} e_R - y^*\, \bar{e}_R \begin{pmatrix} 0 & \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{y\, v}{\sqrt{2}}\, \bar{e}_L e_R - \frac{y\,\eta}{\sqrt{2}}\, \bar{e}_L e_R + h.c.$$

↳ On trouve la masse de l'électron $m_e = \frac{y\, v}{\sqrt{2}}$ (masse de Dirac)

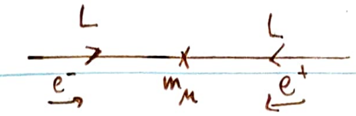
→ $m_e \propto v$ car elle provient de la BSS, et l'invariance de jauge prédit $m_e = 0$

→ L'interaction de Yukawa entre le boson BEH η et e_L et e_R est proportionnelle à m_e : $\frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{m_e}{v}$

→ Pas d'interaction de Yukawa ni de masse pour les neutrinos ! En effet :

→ pas de ν_R ⟺ pas de masse de Dirac $m_\nu^D\, \bar{\nu}_L \nu_R$

→ Pas de masse de Majorana non plus : il existe une symétrie accidentelle du MS, une $U(1)_g$ sous laquelle $L_e \mapsto e^{i\theta} L_e$, $e_R \mapsto e^{i\theta} e_R$ car cela n'autorise que les termes du type $\bar{L} \cdots L$, $\bar{e}_R \cdots e_R$ et $\bar{L} \cdots e_R$: le nombre de lepton est conservé ! Vient de la symétrie de jauge et du nombre quantique leptonique.

→ Pourquoi pas un terme $\bar{L}^c L$  ?

?

Car il ne respecte pas $SU(2)_L \times U(1)_Y$.
En effet, $Y(\bar{L}_e^c L_e) = Y(\bar{L}_e^c)\, Y(L_e) = (-1)(1)$

⊙ Généralisation à 3 générations :

→ L'interaction de jauge est diagonale en saveur car elle est générée depuis le terme cinétique des fermions, lui-même diag. en saveur dans la théorie libre $\mathcal{L} \ni \bar{L}_e i \not{\partial} L_e$
$\mapsto$ $\bar{L}_e i\not{\partial} L_e$ pas de $\bar{L}_e i \not{\partial} L_\mu$, seulement $\bar{L}_j i \not{\partial} L_j$
Cependant, l'interaction de Yukawa peut-être non diagonale, tout en restant invariante de jauge : ↳ sous $SU(2)_L \times U(1)_Y$

$$\mathcal{L} \ni -\bar{L}_i\, y_{ij}\, \phi\, \ell_j + \text{h.c.}$$

Or, en QFT, toutes les interactions autorisées par les symétries existent

→ Cependant, $\mathcal{L} \ni i\bar{L}_j \not{\partial} L_j + i\bar{\ell}_{Rj} \not{\partial}\, \ell_{Rj}$ est invariant sous $SU(3)_L \times SU(3)_R$ global :

$$\begin{pmatrix} L_e \\ L_\mu \\ L_\tau \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} L_e' \\ L_\mu' \\ L_\tau' \end{pmatrix} \equiv U_L \begin{pmatrix} L_e \\ L_\mu \\ L_\tau \end{pmatrix} \quad \text{avec } U_L \in SU(3)_L \quad \text{et}$$

$$\ell_R \equiv \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e_R' \\ \mu_R' \\ \tau_R' \end{pmatrix} \equiv U_R \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \quad \text{avec } U_R \in SU(3)_R$$

En effet, $i\not{\partial}$ est le même pour toute les générations : $[U_L, i\not{\partial}] = 0$
$[U_R, i\not{\partial}] = 0$

De plus, $\bar{\psi}\gamma_\mu \psi = \bar{\psi}_L \gamma_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_R \mapsto \bar{\psi}_L U_L^\dagger \gamma_\mu U_L \psi_L + \bar{\psi}_R U_R^\dagger \gamma_\mu U_R \psi_R$
$= \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$

↳ La seule interaction impactée par $SU(3)_L \times SU(3)_R$ est l'interaction de Yukawa, puisqu'elle mélange des fermions L et R :
$\mathcal{L} \ni -\bar{L}_i\, y_{ij}\, \ell_{Rj}\, \phi = -\bar{L}'_k\, U^\dagger_{L\,ki}\, y_{ij}\, \phi\, U_{R\,jk}\, \ell'_{R\,k}$

Thm (Diagonalisation bi-unitaire)

Soit $M \in GL(n, \mathbb{C})$. Elle peut toujours être diagonalisée par une transformation biunitaire :

$$\exists\, U_L, U_R \in U(n) \text{ tel que } U_L^\dagger M U_R = \text{diag}(M_1, \dots, M_n)$$

DEMO → Soit $H^2 \equiv MM^\dagger$. Alors H^2 est hermitien, et peut donc etre diagonalisé : $\exists\, U_L \in U(n) \,/\, U_L^\dagger H^2 U_L = U_L^\dagger M M^\dagger U_L = D^2$

où $D^2 = \text{diag}\{M_1^2, \dots, M_n^2\}$.

→ Soit $D \equiv \sqrt{D^2} = \text{diag}\{\sqrt{M_1^2}, \dots, \sqrt{M_n^2}\}$, alors

$H \overset{\otimes}{\equiv} U_L D U_L^\dagger$ satisfait $H^2 = MM^\dagger$

→ Soit $V \equiv H^{-1} M$. Alors :

↳ $V^\dagger V = M^\dagger H^{-1} H^{-1} M = M^\dagger (MM^\dagger)^{-1} M = \mathbb{1}$: V est hermitien

↳ On trouve $M = HV \overset{\otimes}{=} U_L D U_L^\dagger V \equiv U_L D U_R^\dagger$

avec $U_R \equiv V^\dagger U_R^\dagger$ ▨

→ On peut donc se ramener dans une base des L_i et des ℓ_{Ri} où la matrice de Yukawa y_{ij} est diagonale :

$$U_L^\dagger y\, U_R = y_{\text{diag}} = \text{diag}\{y_e, y_\mu, y_\tau\}$$

Puisque la masse des leptons est $\propto y_{ij}$, cette base est également celle des états physiques :

$$M_{\ell,\text{diag}} = \text{diag}\{m_e, m_\mu, m_\tau\} = \text{diag}\left\{\frac{y_e v}{\sqrt{2}}, \frac{y_\mu v}{\sqrt{2}}, \frac{y_\tau v}{\sqrt{2}}\right\}$$

↳ Il n'y a pas d'interaction qui change la saveur des leptons dans le MS. : $y_{\text{diag}} \propto M^\ell_{\text{diag}}$

⊙ Symétries globales accidentelles :

→ Le nombre leptonique electronique, muonique et tauique sont conservés indépendament : $L_j \mapsto e^{i\theta_j} L_j$ et $\ell_{Rj} \mapsto e^{i\theta_j} \ell_{Rj}$.

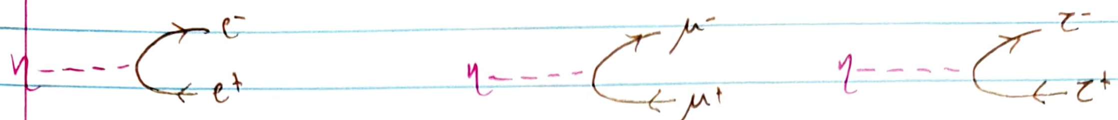
Il y a 3 $U(1)_g$ conservés séparements :

$U(1)_e$, $U(1)_\mu$ et $U(1)_\tau$, de # quantique associés L_e, L_μ et L_τ.

↳ Le # total de lepton est noté L.

Prédiction :

→ On peut tester $m_{e_i} = y_i v / \sqrt{2}$ en mesurant m_e, m_μ, m_τ et y_e, y_μ et y_τ via le taux de désintégration de :



$$\hookrightarrow \frac{\Gamma(\eta \to \tau\tau)}{\Gamma(\eta \to \mu\mu)} \propto \frac{y_\tau^2}{y_\mu^2} = \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} + \mathcal{O}\left(\frac{m_{\tau,\mu}^2}{m_\eta^2}\right)$$

4.9 Renormabilité de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ avec BSS

→ Cette théorie était connue depuis 1967 mais pas prise au sérieux car on l'a pensait non-renormalisable.

→ En 1971, t' Hooft et Veltman ont prouvé que la théorie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ avec BSS est bien renormalisable

→ A partir de ce moment, les théories de gauge comme principe fondamental des interactions fondamentales est devenu dominant.