CH2 SYMÉTRIES DE JAUGE

DEF Il existe une symétrie lorsque le Lagrangien $\mathcal{L}$ est indépendant du choix de coordonnées de l'espace où cette symétrie agit.

→ Symétrie externe : reliée à l'espace-temps : translation, rotation, boost, parité ($\bar{x} \mapsto -\bar{x}$), renversement du temps ($t \mapsto -t$)

→ Symétrie interne : conservation des nombres quantiques
charge électrique, # de baryons, de leptons, isospin, $SU(3)_F$, étrangeté, $SU(2)_L$ globale, $U(1)_Y$ globale, $SU(3)_c$ globale

→ Symétrie de jauge : symétries internes, mais reliées à l'espace-temps.

DEF Le fait de jauger une symétrie signifie la localiser. Une symétrie est locale si le choix de coord. dans l'espace où la symétrie peut être fait indépendamment en ≠ points. On introduit alors un opérateur dynamique : une symétrie globale peut être jaugée en introduisant un champ d'interaction : un champ de jauge.

2.1 Cas abélien

⊙ Lagrangien libre d'un électron :

→ On a $\mathcal{L} = \bar{\psi}_e (i\not{\partial} - m)\psi_e$

↳ Invariant sous $U(1)$ global : $\psi_e \mapsto \psi_e' = e^{i\alpha}\psi_e$

↳ Le courant de Noether associé est $j^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e$, avec $\partial_\mu j^\mu = 0$

↳ La charge de Noether associée est

$$Q = \int j^0 \, d^3x = \# e^- - \# e^+$$

Ça ressemble à la conservation de la charge électrique, mais il n'y a pas d'interaction électrique ici. En fait, $U(1)$ est local.

⊙ Jauge de la symétrie $U(1)$:

→ On localise la symétrie. On considère la transformation locale

$$\psi \mapsto \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi \simeq (1 + i\alpha(x))\psi$$

$$\bar{\psi} \mapsto \bar{\psi}' = e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi} \simeq (1 - i\alpha(x))\bar{\psi}$$

→ Le Lagrangien se transforme à présent comme :

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \bar{\Psi}\gamma^\mu\psi \,.\, \partial_\mu \alpha \neq \mathcal{L}$$

Afin de rétablir l'invariance de la symétrie, on rajoute un nouveau terme au $\mathcal{L}$ pour annuler le terme en trop.

→ Puisque $\partial_\mu \alpha(x)$ est un 4-vecteur, le champ introduit sera vectoriel.

→ On introduit $\delta\mathcal{L} \equiv -e\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu \psi = -e\bar{\Psi}\not{A}\psi$. Il se transforme selon :

$$\delta\mathcal{L}' = -e\bar{\Psi}'\not{A}'\psi' = -e\bar{\Psi}\not{A}'\psi$$

Il faut alors demander que

$$-\bar{\Psi}\gamma^\mu\psi\,\partial_\mu\alpha - e\bar{\Psi}\gamma^\mu A'_\mu\psi \overset{!}{=} \delta\mathcal{L} = -e\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$$

$$\Longleftrightarrow \quad A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$$

C'est la transformation de jauge du champ de vecteur A^μ :

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$$

→ Le Lagrangien devient :

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_e(i\not{\partial} - m)\Psi_e - e\bar{\Psi}_e\gamma^\mu A_\mu \Psi_e$$

$$= \bar{\Psi}_e(i\gamma^\mu[\partial_\mu + ieA_\mu] - m)\Psi_e$$

$$= \bar{\Psi}_e(i\not{D} - m)\Psi_e$$

DEF | On a introduit la dérivée covariante $D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$

Prop | La dérivée covariante se transforme selon $D'_\mu\psi' = e^{i\alpha}D_\mu\psi$

$\boxed{\text{DEMO}}$ En effet,

$$D'_\mu A'_\mu = (\partial_\mu + ieA'_\mu)\psi' = (\partial_\mu + ie[A_\mu - \tfrac{1}{e}\partial_\mu\alpha])e^{i\alpha}\psi$$

$$= e^{i\alpha}\partial_\mu\psi + \psi.\, ie^{i\alpha}\partial_\mu\alpha + ieA_\mu e^{i\alpha}\psi - i\partial_\mu\alpha.\, e^{i\alpha}\psi$$

$$= e^{i\alpha}(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi = e^{i\alpha}D_\mu\psi$$

▨

→ $A_\mu(x)$ peut être une particule si elle peut se propager. Il faut un terme cinétique, qui soit invariant de jauge !

→ Le terme $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ est bien invariant de jauge.
En effet, $F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{e}\partial_\mu\partial_\nu\alpha - \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\nu\partial_\mu\alpha = F_{\mu\nu}$
On obtient alors :

DEF Le Lagrangien QED :

$$\mathcal{L}_{QED} \equiv -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}_e(i\not{\partial} - m_e)\psi_e$$

$$= -\frac{1}{4}F^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi$$

→ Afin de faire apparaître la charge de l'électron, on substitue

$$\alpha(x) \mapsto -\alpha(x) \cdot Q_e \quad \text{avec} \quad Q_e = -1$$

et $D_\mu = \partial_\mu - ieQ_eA_\mu$

↳ toujours invariant sous $\psi_e \mapsto \psi'_e = e^{-i\alpha Q_e}\psi$
$A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha$

↳ Le courant de Noether devient $j^{em}_\mu \equiv Q_e\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_e$
On peut réécrire le terme d'interaction du $\mathcal{L}$ selon

$$\mathcal{L} \ni \bar{\psi}_e\, e\, Q_e A_\mu \gamma^\mu \psi_e = e A_\mu j^\mu_{em}$$

On voit que j^{em}_μ est le courant qui couple au champ A_μ (photon).

↳ La charge de QED est alors :

$$Q_{em} = \int j^0_{em}\, d^3x = Q_e(\#e^- - \#e^+)$$

$$= Q_{e^-}(\#e^-) + Q_{e^+}(\#e^+) \text{ la charge électrique.}$$

⊙ Commentaires :

① Le produit $e \cdot Q_e$ est fixé par l'expérience, c'est la force de l'interaction $e^- - \gamma$. Par contre, la normalisation de (Q_e, e) est arbitraire.

On pourrait rescale $Q_e \mapsto aQ_e$, $e \mapsto e/a$ et $\alpha \mapsto \alpha/a$, cela laisserait eQ_e, $\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha$ et $Q_e \cdot \alpha$ invariant.

Cependant, cela ne fixe pas les charges des autres particules. Le $\mathcal{L}$ resterait invariant avec un $Q_{e'}$ différente, avec le même champ de A_μ. La seule ≠ serait dans $D_\mu = \partial_\mu - iQ_{e'}A_\mu$.

② $U(1)$ local interdit un terme de masse en A_μ :

$$\mathcal{L} \ni -m_A^2 A_\mu A^\mu \text{ n'est pas invariant de jauge}$$

Puisque $m_A = 0$, le photon a une portée infinie.

③ A_μ n'a pas d'auto-interaction.

Regardons comment coupler A_μ à lui même :

→ $A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu$ et $\partial_\mu A^\nu \cdot A^\mu A_\nu$ interdit par $U(1)_{local}$

→ $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}$ possible mais dérivée totale → non physique

→ Terme en dimension > 4 :

$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ $\quad$ $\bar{\Psi} \sigma_{\mu\nu} \Psi F^{\mu\nu}$ est invariant de jauge, mais non renormalisable.

$S^{\mu\nu} = \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}$ $\quad$ On a bien $[\Psi] = E^{3/2}$, $[A^\mu] = E^1$, $[\partial_\mu] = 1$ et $[\gamma^\mu] = 0$.

④ <u>Identités utiles</u> :

DEF On définit le tenseur d'intensité du champ de jauge (Gauge Field Strength) selon

$$F_{\mu\nu} = \frac{-1}{ig} [D_\mu, D_\nu]$$

→ Dans le cas de QED, on retrouve bien

$$[D_\mu, D_\nu] = ie F_{\mu\nu} \Psi$$

⑤ QED pour un champ scalaire complexe :

→ On peut appliquer le même principe de jauge :

Le Lagrangien $\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$ est invariant sous $U(1)$ global :

$\phi \mapsto \phi' = e^{i\alpha Q_\phi} \phi$. On promeut les dérivées en dérivée covariantes :

$\partial_\mu \mapsto D_\mu = \partial_\mu - ie Q_\phi A_\mu$. Elles se transforment bien comme

$$D_\mu \phi \mapsto D'_\mu \phi' = e^{-i\alpha(x) Q_\phi} D_\mu \phi \text{ avec } A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$$

Le Lagrangien devient :

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi$$

→ Le courant de Noether associé est :

$$j_\mu^{em} = iQ_\phi \{ \partial_\mu \phi^\dagger \cdot \phi - \phi^\dagger \cdot \partial_\mu \phi \} = 0 \text{ si } \phi^\dagger = \phi$$

Il faut que $\phi \in \mathbb{C}$ pour avoir une interaction e-m.

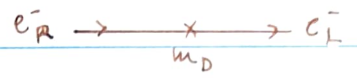
⑥ Electro-magnétisme classique :

→ Le Lagrangien classique $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + e J_\mu A^\mu$ est aussi invariant de jauge, mais seulement pour A_μ : $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \alpha$, pas pour le champ de matière J_μ. Il n'y a donc pas de symétrie $U(1)$ globale associée. Cependant, l'invariance de jauge de l'é-m classique implique qd mê $\partial_\mu j^\mu_{em} = 0$

⑦ QED : conservation de Q_{em} et m_ψ :

→ La conservation de la charge permet une masse pour les fermions seulement s'ils sont de Dirac.

→ Les fermions de Majorana (massif) doivent alors être neutre électriquement.



→ Une symétrie $U(1)$ locale admet 2 possibilité pour les fermions chargés :

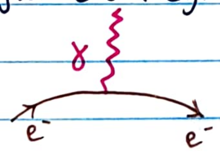
1) Fermion de Weyl (massless) : $\bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L$ est inv. de jauge.

2) Fermions de Dirac (massif) : $\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$ est inv. de jauge.

C'est à dire que 2 fermions de Weyl χ_L et χ_R de mê charge électrique sont autorisés à former un fermion de Dirac massif par invariance de jauge.

→ En pratique, dans le MS, tout les fermions chargés sont de Dirac.

⑧ Règles de Feynman :



décrit par $\mathcal{L} \ni e Q_e \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e A_\mu$

L'élément de matrice est donné par :

$\mathcal{M} = \sum_{\lambda=1,2} i e Q_e \bar{u}_e \gamma^\mu u_e \epsilon^\lambda_\mu$

2.2 Cas non-abélien : theories de Yang-Mills

⊙ Cas d'un $SU(2)$:

→ Soit ψ_1, ψ_2 des fermions de Dirac :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_1 (i\not{\partial} - m_1)\psi_1 + \bar{\psi}_2 (i\not{\partial} - m_2)\psi_2$$

↳ Si $m_1 = m_2$, il y a invariance $SU(2)$ globale :

Soit $\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ et soit $U \in SU(2)$. Alors

$$\psi' = U\psi = \exp\{-i \frac{\tau_j}{2} \theta_j\} \psi$$

où les $\tau_j = \sigma^j$ les générateurs de la représentation doublet de $SU(2)$.

→ $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \mapsto \mathcal{L}' = \bar{\psi} U^+ i\not{\partial} U\psi - \bar{\psi} U^+ m U\psi = \mathcal{L}$

→ Localisation du $SU(2)$ global :

⇝ $\psi' = U(x)\psi = \exp\{-i \frac{\tau_j}{2} \theta_j(x)\}\psi$

↳ Le terme de masse est tjs invariant de jauge :

$$\bar{\psi}\psi \mapsto \bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi} U^+ U \psi = \bar{\psi}\psi$$

↳ Le terme cinétique ne l'est plus :

$$\bar{\psi}\not{\partial}\psi \mapsto \bar{\psi} U^+ \not{\partial} U\psi = \bar{\psi} U^+ U \not{\partial}\psi + \bar{\psi} U^+ \gamma^\mu (\partial_\mu U).\psi$$
$$= \bar{\psi}\not{\partial}\psi + \bar{\psi} U^+ \gamma^\mu (\partial_\mu U(x)).\psi$$

→ Transformation infinitésimale :

$$U^+ \partial_\mu U \simeq (1 + i \frac{\tau}{2}\cdot\theta)\, \partial_\mu (1 - i \frac{\tau}{2}\cdot\theta) = -i \frac{\tau_j}{2} \partial_\mu \theta_j(x) + \mathcal{O}(\theta^2)$$

↳ Il faut 3 champs de vecteurs $A^j_\mu(x)$ pour compenser les 3 fonctions indépendantes $\partial_\mu \theta^j(x)$. On rajoute un terme au $\mathcal{L}$:

$$\delta\mathcal{L} \equiv \bar{\psi}(-ig \frac{\tau_j}{2} A^j_\mu)\gamma^\mu \psi$$

→ Ceci définit la dérivée covariante : $D_\mu \equiv \partial_\mu - ig \frac{\tau}{2}\cdot A_\mu$

↳ $\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi \mapsto \bar{\psi} D_\mu \gamma^\mu \psi = \bar{\psi}(\partial_\mu - ig \frac{\tau_j}{2} A^j_\mu)\gamma^\mu\psi$

→ Pour avoir invariance du Lagrangien, il faut que la dérivée covariante se transforme selon $D_\mu \psi \mapsto D'_\mu \psi' = U D_\mu \psi$

$$\Leftrightarrow \bar\Psi \partial_\mu \gamma^\mu \psi - ig\bar\Psi \frac{\tau_j}{2} A^j_\mu \gamma^\mu \psi \mapsto \bar\Psi U^\dagger \not\partial U\psi - ig\bar\Psi U^\dagger \frac{\tau_j}{2} A'^j_\mu \gamma^\mu U\psi$$

$$= \bar\Psi \not\partial \psi + \bar\Psi U^\dagger(\partial_\mu U)\gamma^\mu \psi + \bar\Psi U^\dagger\left(-ig\frac{\tau}{2}\cdot A'_\mu\right)\gamma^\mu U\psi$$

$$\stackrel{!}{=} \bar\Psi \not D \psi = \bar\Psi \not\partial \psi + \bar\Psi\left(-ig\frac{\tau}{2}\cdot A_\mu\right)\gamma^\mu \psi$$

$$\Leftrightarrow U^\dagger\left(-ig\frac{\tau}{2}\cdot A'_\mu\right)U + U^\dagger\partial_\mu U \stackrel{!}{=} -ig\frac{\tau}{2}\cdot A_\mu$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tau}{2}\cdot A'_\mu = U\frac{\tau}{2}\cdot A_\mu U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger$$

En transformations infinitésimale, on peut écrire :

$$U = \exp\left\{-i\frac{\tau_j}{2}\cdot\theta^j(x)\right\} \simeq \mathbb{1} - i\frac{\tau_j}{2}\theta^j$$

$$\frac{\tau_j}{2}A'^j_\mu = \left(\mathbb{1} - i\frac{\tau_j}{2}\theta^j\right)\cdot\frac{\tau_\ell}{2}A^\ell_\mu\left(\mathbb{1} + i\frac{\tau_k}{2}\theta^k\right) - \frac{i}{g}\partial_\mu\left\{i\frac{\tau_k}{2}\theta^k\right\}\left(\mathbb{1} + i\frac{\tau_j}{2}\theta^j\right)$$

$$= \frac{\tau_\ell}{2}A^\ell_\mu - i\theta_j\left[\frac{\tau_j}{2},\frac{\tau_k}{2}\right]A^k_\mu - \frac{1}{g}\frac{\tau_k}{2}\partial_\mu\theta^k + \mathcal{O}(\theta^2)$$

$$= \frac{\tau_\ell}{2}A^\ell_\mu + \theta_j\epsilon_{ijk}\frac{\tau_i}{2}A^k_\mu - \frac{1}{g}\frac{\tau_k}{2}\partial_\mu\theta^k \qquad \left[\frac{\sigma^i}{2},\frac{\sigma^j}{2}\right] = i\epsilon^{ijk}\frac{\sigma^k}{2}$$

$$\Rightarrow A'^i_\mu = A^i_\mu + \theta_j\epsilon_{ijk}A^k_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta_i$$

On trouve 2 termes de transformation :

① $-\frac{1}{g}\partial_\mu\theta_i$: terme de localisation de la symétrie, similaire au cas abélien

② $+\theta_j\epsilon_{ijk}A^k_\mu$: terme non abélien global ($\Leftrightarrow \neq 0$ même si $\theta(x) = \theta$)

↳ Sous une symétrie SU(2) globale, les A^i_μ forment des triplets de SU(2) : ils se transforment dans la représentation adjointe de SU(2)

Le # de A^i_μ = # de générateurs de SU(2)

↳ Les A^i_μ sont chargés sous SU(2) (contrairement au cas abélien où A_μ est neutre sous U(1) global).

⊙ Construction du terme cinétique :

→ Naïvement, on pourrait proposer $F^j_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^j_\nu - \partial_\nu A^j_\mu$ mais il n'est pas invariant sous $SU(2)$ car $[\tau_i, \tau_j] \neq 0$

→ On utilise la définition du tenseur d'intensité du champ de jauge :

$$-ig \frac{\tau_j}{2} F^j_{\mu\nu} \equiv [D_\mu, D_\nu]$$

→ Quelques calculs préliminaires :

↳ $D_\mu \psi \xmapsto{SU(2)} U D_\mu \psi = U D_\mu (U^{-1} \psi') \Rightarrow D_\mu \mapsto U D_\mu U^+$

↳ $[D_\mu, D_\nu] \mapsto U [D_\mu, D_\nu] U^+$

$$\Rightarrow -ig \frac{\tau}{2} \cdot F_{\mu\nu} \mapsto -ig\, U \frac{\tau}{2} \cdot F_{\mu\nu} U^+$$

→ Un terme invariant de jauge se construit selon :

$$-\frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left[\frac{\tau_i}{2} F^i_{\mu\nu} \cdot \frac{\tau_j}{2} F_j^{\mu\nu} \right] = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a$$

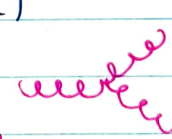
→ En composantes :

$$\begin{aligned}
-ig \frac{\tau}{2} \cdot F_{\mu\nu} &= [D_\mu, D_\nu] \\
&= \left[\partial_\mu - ig \frac{\tau}{2} \cdot A_\mu , \partial_\nu - ig \frac{\tau}{2} \cdot A_\nu \right] \\
&= -ig \frac{\tau_a}{2} \left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu \right) + \overbrace{\left[-ig \frac{\tau}{2} \cdot A_\mu , -ig \frac{\tau}{2} \cdot A_\nu \right]}^{-g^2 A^b_\mu A^c_\nu \left[\frac{\tau_b}{2}, \frac{\tau_c}{2} \right]} \\
&= -ig \frac{\tau_a}{2} \left\{ \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\, \epsilon_{abc} A^b_\mu A^c_\nu \right\}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\, \epsilon_{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

→ Le Lagrangien comporte donc le terme cinétique suivant :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \ni -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} &= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^\nu_a - \partial^\nu A^\mu_a) \\
&+ g \left\{ \begin{aligned} &(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)\, \epsilon_{abc} A^b_\mu A^c_\nu \\ &+ \epsilon_{abc} A^b_\mu A^c_\nu (\partial^\mu A^\nu_a - \partial^\nu A^\mu_a) \end{aligned} \right\} \\
&+ g^2 \epsilon_{abc} A^b_\mu A^c_\nu\, \epsilon_{ade} A^\mu_d A^\nu_e
\end{aligned}$$



↳ Pas de théorie libre ! A^a_μ chargé sous $SU(2)$ car l'invariance de jauge requiert que $A^a_\mu \in adj\{SU(2)\}$

⊙ Résumé :

→ Le Lagrangien est donné par

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{a} F^{\mu\nu}_{a}$$

avec $D_\mu \equiv \partial_\mu - ig \frac{\tau_a}{2} A_\mu^a$ et $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\,\epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$

→ Sous $SU(2)$ (transfo de jauge), les champs se transforment comme :

$$\psi \mapsto \psi' = U\psi = \exp\left\{-i\frac{\tau_a}{2}\theta^a(x)\right\}\psi$$

$$\frac{\tau_a}{2} A_\mu^a \mapsto \frac{\tau_a}{2} A_\mu'^a = U \frac{\tau_a}{2} A_\mu U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger$$

⊙ Commentaires :

① Charges fixées par la théorie

→ Cas abélien :

→ Couplage de jauge arbitraire e, seul $Q.e$ est fixé

→ ≠ particules avec ≠ Q

→ Cas non-abélien :

→ Couplage de jauge g fixé : c'est l'intensité des termes d'interactions trilinéaires en A_μ^a

→ Une fois g fixé, le couplage matière - champs de jauge est également fixé (D_μ fixé puisque $D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\tau}{2}\cdot A_\mu$)

↳ C'est l'universalité des interaction de jauge non-abéliennes, par exemple, e_L^-, μ_L^-, d_L ont tous la même interaction sous $SU(2)_L$

② Autres représentations de $SU(2)$

→ Il suffit de substituer $\frac{\tau_a}{2} \mapsto T_a$, les générateurs de la rep. n-dim. de $SU(2)$ pour une rep n-dim. d'un champ de matière ψ :

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = \exp\{-i\,T_a\,\theta^a(x)\}\,\psi(x)$$

→ Pour d'autres groupes unitaires non abéliens, il faut en plus substituer

$$i\epsilon_{abc} \mapsto iC_{abc} \text{ tq } [T^a, T^b] \equiv iC_{abc}T^c$$