MODELE STANDARD DES INTERACTIONS FONDAMENTALES

CH1 CHAMPS ELEMENTAIRES

→ Théorie quantique des champs nécessaire pour décrire des comportements quantiques et relativistes. Les champs de particules sont classifiés selon leur transformation sous le groupe de Lorentz. Ce sont des irreps de ce groupe.

1.1 Champ scalaire réel φ

→ Se transforme selon $\varphi(x) \mapsto \varphi'(x') \overset{!}{=} \varphi(x) = \varphi(\Lambda^{-1}x')$
C'est un champ de spin 0, avec 1 dof (1 fct de x^μ)

→ Les invariants bilinéaires de Lorentz possibles sont :
$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad \text{et} \quad \phi^2$$

↳ Le Lagrangien libre est donné par :
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$
avec $[m] = E$

↳ Les EOM sont $\{\partial^2 + m^2\}\phi = 0$. C'est l'éq. de Klein-Gordon.
Sa solution est donnée par :
$$\varphi(x) = \int d^3k \left\{ a(\vec{k})\, e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})\, e^{ikx} \right\}$$

→ Le champ est auto conjugué $\varphi^*(x) = \varphi(x)$

1.2 Champ scalaire complexe φ

→ Se transforme selon $\varphi'(x') = \varphi(x) = \varphi(\Lambda^{-1}x)$.
↳ spin 0, mais 2 dof. En effet, on a

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{Re}\{\phi\} + i\,\mathrm{Im}\{\phi\}}{\sqrt{2}} \qquad \phi^{\dagger}(x) = \frac{\mathrm{Re}\{\phi\} - i\,\mathrm{Im}\{\phi\}}{\sqrt{2}}$$

→ Ses invariants bilinéaires de Lorentz sont
$$\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi \quad \text{et} \quad \varphi^\dagger \varphi$$
(hermitien pour conserver la probabilité)

↳ Le Lagrangien libre est donné par
$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$
(plus les facteurs 1/2)

On remarque que la masse de $\mathrm{Re}\{\phi\}$ et $\mathrm{Im}\{\phi\}$ est dégénérée :
$$m^2 \phi^\dagger \phi = \frac{m^2}{2}\left(\mathrm{Re}\{\phi\}^2 + \mathrm{Im}\{\phi\}^2\right)$$

↳ Les EOM sont données par :
$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0 \quad \text{et} \quad (\partial^2 + m^2)\phi^\dagger = 0$$

Les solutions des EOM sont :

$$\varphi(x) = \int d^3k \left\{ a(k)\, e^{-ikx} + b^\dagger(k)\, e^{ikx} \right\}$$

$$\varphi^\dagger(x) = \int d^3k \left\{ b(k)\, e^{-ikx} + a^\dagger(k)\, e^{ikx} \right\}$$

→ Le champ n'est pas autoconjugué (2 dof) :
$$\varphi(x) \neq \varphi^*(x)$$

1.3 Champ vectoriel A^μ

→ Se transforme sous $A^\mu(x) \mapsto A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x')$

↳ C'est un champ de spin 1

→ Ses bilinéaires invariants de Lorentz sont :

$A^\mu A_\mu$, $\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu$, $\partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu$.

Pour les termes dérivatifs, seule la combinaison $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ permet d'obtenir un hamiltonien défini positif.

↳ Le Lagrangien est donné par :

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu$$

↳ Les EOM sont $\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$

Les EOM doivent donner K-G car A^μ est un boson $\Rightarrow \partial_\mu A^\mu = 0$

Si $m \neq 0$, c'est tjs le cas : $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$

Si $m = 0$, c'est un choix de jauge, celle de Lorentz.

↳ Les solutions des EOM sont :

$$A_\mu(x) = \int d^3\mathbf{k} \sum_{\lambda=1}^{3} \left\{ a^\lambda(\mathbf{k})\, \epsilon_\mu^\lambda(\mathbf{k})\, e^{-ikx} + a^{\lambda\dagger}(\mathbf{k})\, \epsilon_\mu^{\lambda\dagger}(\mathbf{k})\, e^{ikx} \right\}$$

où $\epsilon_\mu^\lambda(\mathbf{k})$ est le vecteur de polarisation

Cependant, il faut que $\partial^\mu A_\mu = 0 \Leftrightarrow \epsilon_\mu^\lambda k^\mu = 0 \rightsquigarrow$ 3 dof

On a 2 mode transverses :

$$\epsilon_\mu^{1,2} = (0, \vec{e}_{1,2}(\mathbf{k})) \quad \text{tels que} \quad \vec{e}_{1,2} \cdot \vec{\mathbf{k}} = 0$$

Et 1 mode longitudinal :

$$\epsilon_\mu^3 = \left(\frac{|\mathbf{k}|}{m}, \frac{E}{m} \cdot \frac{\vec{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|} \right), \text{ non physique pour } m = 0$$

En fait, ne couple pas au courant $A_\mu J^\mu$ dans $\mathcal{L}_I$. En effet, $\partial_\mu J^\mu = 0$

$\Leftrightarrow k_\mu J^\mu = 0 \Leftrightarrow E J^0 = \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{J}$ et donc

$$\epsilon^3_\mu J^\mu = \frac{|\mathbf{k}|}{m} J^0 - \frac{E}{m} \frac{\vec{k} \cdot \vec{J}}{|\mathbf{k}|} = \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{J} \left(\frac{|\mathbf{k}|}{E.m} - \frac{E}{m} \cdot \frac{1}{|\mathbf{k}|} \right)$$

$$= J^0 \left(\frac{|\mathbf{k}|}{m} - \frac{E^2}{m} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \right) = \frac{J^0}{|\mathbf{k}|} \left(\frac{|\mathbf{k}|^2 - E^2}{m} \right) = \frac{J^0 m}{|\mathbf{k}|} = 0 \text{ si } m = 0$$

1.4 Spineur de Dirac Ψ

→ Se transforme selon $\Psi(x) \mapsto \Psi'(x') = \exp\{\frac{-i}{2}\omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}\}\Psi(\Lambda^{-1}x)$

avec

$S^{\alpha\beta} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$ les générateurs de l'algèbre de Lorentz
par la représentation de spin 1/2

et $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ est le paramètre de Lorentz associé.

↳ Les $\Psi(x)$ sont des bispineurs $\in \mathcal{M}at_{4\times1}(\mathbb{C})$

↳ En composante Ψ_L, Ψ_R, on peut écrire $\Psi = P_L\Psi + P_R\Psi \equiv \Psi_L + \Psi_R = \begin{pmatrix}\Psi_L \\ \Psi_R\end{pmatrix}$

En representation de Weyl, un spineur de Weyl se transforme selon $\chi_{L,R}(x) \mapsto \chi'_{L,R}(x') = \exp\{\pm\frac{1}{2}\omega_{0i}\sigma_i - \frac{i}{4}\omega_{ij}\epsilon^{ijk}\sigma_k\}\chi_{L,R}(\Lambda^{-1}x)$

Ainsi, on voit que Ψ est un objet composite sous Lorentz.

Prop Un spineur de Dirac Ψ est la somme de 2 irrep de Lorentz : L+R, càd la somme de 2 spineurs de Weyl.

→ Ses bilinéaires invariants de Lorentz sont

$i\bar\Psi \not\partial \Psi = i\bar\Psi_L \not\partial \Psi_L + i\bar\Psi_R \not\partial \Psi_R$ et $\bar\Psi\Psi = \bar\Psi_L\Psi_R + \bar\Psi_R\Psi_L$

$i\bar\Psi\gamma^\mu\Psi$ $\bar\Psi\gamma^\mu\Psi$

↳ Le Lagrangien libre est le Lagrangien de Dirac :

$$\mathcal{L} = \bar\Psi(i\not\partial - m)\Psi$$

↳ Les EOM sont données par : $(i\not\partial - m)\Psi = 0$

En spineur de Weyl, ce sont les éq. de Weyl :

$$\begin{cases} i\{\partial_t - \vec\sigma\cdot\vec\nabla\}\chi_L = m\chi_R \\ i\{\partial_t + \vec\sigma\cdot\vec\nabla\}\chi_R = m\chi_L \end{cases}$$

→ Les équations sont couplées si $m \neq 0$. Ainsi, un spineur de Dirac est un seul objet physique : son terme de masse mélange χ_L et χ_R :

$$\chi_L \longrightarrow \overset{m}{\times} \longrightarrow \chi_R \qquad\qquad \chi_R \longrightarrow \overset{m}{\times} \longrightarrow \chi_L$$

→ Ainsi, le spineur de Dirac (superposition quantique de 2 spineurs de Weyl à 2 composantes) est une quantité physique : il "reste lui-même" lors de sa propagation.

↳ Les solutions des EOM sont

$$\psi(x) = \int d^3p \sum_{s=1}^{2} \left\{ a^s(\vec{p})\, u^s(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} + b^{s\dagger}(\vec{p})\, v^s(p)\, e^{+ip\cdot x} \right\}$$

$$\bar{\psi}(x) = \int d^3p \sum_{s=1}^{2} \left\{ a^{s\dagger}(\vec{p})\, \bar{u}^s(\vec{p})\, e^{+ip\cdot x} + b^s(\vec{p})\, \bar{v}^s(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} \right\}$$

avec : $u^s(\vec{p}) \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix}$ et $v^s(\vec{p}) \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma\cdot p}\,\xi^s \\ -\sqrt{\bar{\sigma}\cdot p}\,\xi^s \end{pmatrix}$

et $\xi^1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \xi\uparrow$

$\xi^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \xi\downarrow$

Prop Les solutions de spin ↑ et ↓ des EOM sont physiques (ne se mélangent pas) par conservation du spin. Dès lors, elles sont la superposition de ψ_L et ψ_R (qui ne sont pas physiques si $m \neq 0$).

Il devient clair que l'hélicité $h \equiv \vec{S}\cdot\vec{p}/|\vec{p}|$ est $\neq$ de la chiralité quand $m \neq 0$.

1.5 Spineur de Weyl sans masse $\chi_{L,R}$

→ Si $m_\chi = 0$, les χ_L et χ_R ne se mélangent pas et donc sont indépendants sous transfo de Lorentz. On pourrait avoir des spineurs à 2 dof : soit χ_L, soit χ_R, sans obligatoirement avoir les 2.

DEF La matrice de conjugaison de charge C dans la rep de Weyl est donnée par $C \equiv i\gamma^2\gamma^0$. On définit alors :

? vérifier χ_R^c

$$\chi_L^c \equiv C\chi_L = -i\sigma^2 \chi_L^* \quad \text{et} \quad \chi_R^c = i\sigma^2 \chi_R^*$$

→ Se transforme selon :

$$\chi_{L,R}(x) \mapsto \chi'_{L,R}(x') = \exp\left\{ \pm \frac{1}{2}\omega_{0i}\sigma_i - \frac{i}{4}\omega_{ij}\epsilon^{ijk}\sigma_k \right\} \chi_{L,R}(x)$$

On peut également utiliser l'écriture suivante :

$$\begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Lambda_L & 0 \\ 0 & \Lambda_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left\{\frac{-i}{2}(\theta_j - i\beta_j)\sigma_j\right\} & 0 \\ 0 & \exp\left\{\frac{-i}{2}(\theta_j + i\beta_j)\sigma_j\right\} \end{pmatrix}$$

avec $\beta_j = \omega_{0j}$ (boost selon x_j) et $\theta_j = \omega_{ik}\epsilon^{ikj}/2$

→ Ses bilinéaires invariants de Lorentz sont :

$$i\chi_L^c \not{\partial} \psi_L \quad \text{et} \quad \chi_L^c \chi_L$$

↳ Le Lagrangien est donné par

$$\mathcal{L} = \chi_L^c i\not{\partial}\chi_L$$

↳ Les EOM sont : $i(\partial_t - \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla})\chi_L = 0$

Les solutions sont les même que pour Dirac, en ne gardant que les particules de spin anti // à $\vec{p}$;

? $u_\downarrow(\vec{p}) = \sqrt{2\omega_p}\begin{pmatrix} \xi_\downarrow \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_L \\ 0 \end{pmatrix}$ et les antiparticules de spin // à $\vec{p}$:

$$v_\uparrow(\vec{p}) = -\sqrt{2\omega_p}\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_\uparrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_L^c \end{pmatrix}$$

PROP L'hélicité des spineurs de Weyl sans masse est équivalente à leur spin.

1.6 Spineur de Majorana (massif) Ψ_M

→ Peut-on rendre massif les spineurs de Weyl? oui! Il faut construire un term de masse : non dérivatif, invariant de Lorentz, bilinéaire et hermitien.

→ Les spineurs de Weyl se transforment selon :

$$\chi_L \to \chi_L' = \exp\{-\tfrac{1}{2}\omega_{0i}\sigma^i - \tfrac{i}{4}\omega_{ij}\epsilon^{ijk}\sigma^k\}\chi_L \quad \text{et}$$

$$\chi_L^c \to \chi_L^{c\prime} = \exp\{+\tfrac{1}{2}\omega_{0i}\sigma^i - \tfrac{i}{4}\omega_{ij}\epsilon^{ijk}\sigma^k\}\chi_L^c$$

↪ $(\chi_L^c)^t \chi_L$ n'est pas invariant, mais $(\chi_L^c)^\dagger \chi_L$ l'est!

→ Le term de masse de Majorana est donné par

$$\mathcal{L}^{Maj\text{-}Mass} \equiv -\frac{1}{2} m_M \left(\chi_L^{c\dagger}\chi_L + \chi_L^\dagger \chi_L^c \right)$$

où m_M est la masse de Majorana.

⊙ **2 types de masse :**

mélange L et R — transforme part. ⟷ antipart.

⊙ **Etat physique :**

→ Ψ_L n'est pas un état physique (si $m_M \neq 0$), puisqu'il mixe avec Ψ_L^c

DÉF On définit le spineur de Majorana Ψ_M selon $\Psi_M = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_L^c \end{pmatrix}$

→ On aura alors $\Psi_M \xrightarrow{\times\, m_M} \Psi_M$. Le term de masse de Majorana peut alors s'écrire :

$$\mathcal{L}_{M\text{-}Maj} = -\frac{1}{2}\left(\chi_L^\dagger \;\; \chi_L^{c\dagger} \right) \begin{pmatrix} 0 & m_M \\ m_M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_L^c \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} m_M \overline{\Psi}_M \Psi_M$$

On peut aussi écrire :

$$\Psi_M = P_L \Psi_M + P_R \Psi_M = \begin{pmatrix} \chi_L \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_L^c \end{pmatrix}$$

Prop — Les spineurs de Majorana sont leur propre antiparticule (auto-conjugué).

DEF — On définit le spineur de Maj. conjugué ψ_M^c selon

$$\psi_M^c \equiv i\gamma^2\gamma^0\,\overline{\psi}_M^{\,t} = C\,\overline{\psi}_M^{\,t} \quad \text{où } C \equiv i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}$$

Prop — Ainsi définis, $\psi_M^c = \psi_M$

$\boxed{\text{DEMO}}$ En effet,

$$\psi_M^c = i\gamma^2\gamma^0\gamma^{0t}\,\psi_M^*$$
$$= \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_L^* \\ \chi_L^{c*} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_L^* \\ \chi_L^{c*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma_2\,\chi_L^{c*} \\ -i\sigma_2\,\chi_L^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_L^c \end{pmatrix} = \psi_M$$

Ça ne fonctionne pas avec ψ_D : $\psi_D^c = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix}\gamma_0^{\,t}\begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -\chi_R^c \\ \chi_L \end{pmatrix} \neq \psi_D$

→ Le lagrangien libre d'un spineur de Majorana est donné par :

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}_L i\partial\!\!\!/\,\psi_L - \frac{m_M}{2}\left(\overline{\psi}_L^{\,c}\psi_L + \overline{\psi}_L\psi_L^c\right) \quad \text{(4-comp, chiral)}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{\psi}_M\, i\partial\!\!\!/\,\psi_M - \frac{m_M}{2}\overline{\psi}_M\psi_M \quad \text{(4-comp, maj)}$$

$$= i\chi_L^\dagger\,\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_L - \frac{m_M}{2}\left(\chi_L^{c\dagger}\chi_L + \chi_L^\dagger\chi_L^c\right) \quad \text{(2-comp)}$$

↳ EOM et solution :

→ $(i\partial\!\!\!/ - m_M)\,\psi_M = 0 \Leftrightarrow i(\partial_0 - \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla})\,\chi_L = m_M\,\chi_L^c$

→ Solution comme Dirac, en ne gardant seulement les χ_L et χ_L^c (càd en ne gardant que les combinaisons d'états de spin correspondants à χ_L et χ_L^c).

1.7 Résumé

→ Le modèle standard basé sur un # limité de champs fondamentaux :

spin 0 (φ, (φ, φ^*)), spin 1/2 (ψ_D, χ_L, ψ_M), spin 1 (A_μ, A_μ^M)

dof : 1 2 4 2 2 2 3