

[2] BASES DE LA QCD

→ Principe de construction similaire à la QED, mais celle-ci est plus simple à écrire car abélienne. De plus, leur comportement asymptotique est très différent.

→ Le principe de base pour la construction de modèles en physique des particules est l'invariance de jauge locale (physique indépendante des phases des champs). La physique est contenue dans la densité lagrangienne $\mathcal{L}[\psi(x), \partial_\mu \psi(x)]$, une fonctionnelle locale des champs $\psi(x)$ et de leurs dérivées, apd laquelle on construit l'action $S \equiv \int d^4x \{ \mathcal{L}[\psi(x), \partial_\mu \psi(x)] \}$

↳ L'évolution classique de $\psi(x)$ est donnée par les équations d'Euler-Lagrange obtenues en imposant que l'action soit stationnaire sous une variation du champ (principe d'Hamilton):

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi(x)} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \psi(x)} = 0$$

→ L'invariance de jauge locale $\Rightarrow \mathcal{L}$ invariant sous symétrie locale des champs. Le champ définissant l'interaction est celui dont les transformations de jauge compensent exactement celles encourues par le champ de matière $\psi(x)$

→ La connaissance du groupe de symétrie auquel satisfait un champ de matière et sous lequel $\mathcal{L}_I$ doit demeurer invariant permet de déterminer les propriétés du champ porteur de l'interaction ainsi que la forme de son couplage à la matière apd des générateurs et des constantes de structures définissant le groupe de Lie associé.

2.1 Invariance de jauge en QED

- Les équations du mvt d'une particule chargée libre de spin $1/2$ découlent du Lagrangien:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(x) (i\partial - m) \Psi(x)$$

où $\Psi(x) = u(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}$ représente le spineur de Dirac (particule ($E > 0$), antiparticule ($E < 0$), 2 états d'hélicité $\lambda = \pm 1/2$) qui décrit la particule, et $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$ est le spineur adjoint. et où γ^μ sont les matrices de Dirac.

- Le champ de matière $\Psi(x)$ satisfait à une symétrie $U(1)_Q$ attachée à la conservation du courant électrique et correspondant à la t.d.j (transformation de jauge) suivante:

$$\Psi(x) \mapsto \Psi'(x) \equiv e^{-ie\alpha(x)} \Psi(x), \quad \bar{\Psi}(x) \mapsto e^{ie\alpha(x)} \bar{\Psi}(x)$$

Cette transformation ne modifie pas la mesure des observables

↳ Le principe d'invariance de jauge locale sous ce groupe de symétrie $\Rightarrow \partial_\mu \mapsto \mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + ieA^\mu(x)$ la dérivée covariante qui satisfait à:

$$\mathcal{D}^\mu \Psi'(x) = e^{-ie\alpha(x)} \mathcal{D}^\mu \Psi(x)$$

qui définit les lois de transformation de $A^\mu(x)$ associées à $\Psi(x)$:

$$A^\mu(x) \mapsto A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \alpha(x)$$

- Le lagrangien de la théorie en interaction s'écrit maintenant:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi + e \bar{\Psi} \gamma^\mu A_\mu \Psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \mathcal{L}_0 \quad + \mathcal{L}_\pm \quad + \mathcal{L}_{\text{jauge}} \\ &\quad \text{(particule libre)} \quad \text{(interaction)} \quad \text{(E.m.)} \end{aligned}$$

- Le tenseur de Maxwell $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$ est fourni par $[D^\mu, D^\nu] A_\rho = -ie F^{\mu\nu} A_\rho$

- Les EOM sont l'éq de Dirac $(i\partial - m)\Psi = -e \not{A} \Psi$ et les eq. de Maxwell inhomogènes: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = e \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi$
Les eq. homogènes résultent de $\partial_\mu \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}(x) = 0$

2.2 Invariance de jauge non abélienne et Lagrangien de la QCD

- Aucune structure fine liée à la présence de la charge de couleur n'est observée $\Rightarrow$ symétrie exacte de l'Hamiltonien $\Leftrightarrow$ les 3 états de couleurs $\psi_q^r, \psi_q^g, \psi_q^b$ associé à un quark de saveur q donnée sont dégénérés du p.d.v de l'IF. La loi de transformation

$$\begin{pmatrix} \psi_q^r \\ \psi_q^g \\ \psi_q^b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \psi_q^{r'} \\ \psi_q^{g'} \\ \psi_q^{b'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{rr} & U_{rg} & U_{rb} \\ U_{gr} & U_{gg} & U_{gb} \\ U_{br} & U_{bg} & U_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_q^r \\ \psi_q^g \\ \psi_q^b \end{pmatrix}$$

doit constituer une opération de symétrie pour le $\mathcal{L}$.

DEF On définit la fonction d'onde de couleur associé à un quark de saveur q selon:

$$\psi_q^c \equiv \begin{pmatrix} \psi_q^r \\ \psi_q^g \\ \psi_q^b \end{pmatrix}$$

constitue un triplet de la rep. du groupe de symétrie associé dont la loi de transformation $\otimes$ peut s'écrire:

$$\psi_q^c \rightarrow \psi_q^{c'} = U \psi_q^c$$

- La matrice U est unitaire et de déterminant = 1. On a donc $U \in SU(3)_c$

- La fct d'onde de couleur associée à un antiquark est $\psi_q^c = (\psi_q^c)^+$. Sa loi de transformation est donc $\psi_q^c \mapsto \psi_q^{c'} = \psi_q^{c\dagger} U^\dagger$

Prop La fct d'onde de couleur d'un méson est invariante sous cette transformation ($\Leftrightarrow$ c'est un singulet de couleur de cette rep.).

DEMO On a $\psi_{q_1 q_2}^c = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{q_1}^c \psi_{q_2}^c$. Alors

$$\begin{aligned} \psi_{q_1 q_2}^{c'} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{q_1}^{c'} \psi_{q_2}^{c'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{q_1}^{c\dagger} U^\dagger U \psi_{q_2}^c = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{q_1}^{c\dagger} \psi_{q_2}^c \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{q_1}^c \psi_{q_2}^c = \psi_{q_1 q_2}^c \end{aligned}$$



→ Si on choisit $SU(2)_c$ comme groupe de symétrie, on peut mqr on peut choisir $U(1) \subset \mathbb{R}$. En prenant la jct d'onde d'un quark réel également, on aurait $(\psi_q^c)^* = (\psi_q^c)^*$ et $(\psi_q^c)^* = (\psi_q^c)^*$ et cela autorise les combinaisons $\bar{q}q$ et qq . Or, elles ne sont pas observées.

Prop La symétrie de L_{qcd} est $SU(3)_c$

→ Considérons une transformation infinitésimale sous $SU(3)_c$. On a
 $\psi_q^c \mapsto \psi_q^{c'} = (1 + i\zeta) \psi_q^c$
 avec $i\zeta \in \mathfrak{su}(3) \Rightarrow \zeta \in \{ \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{C}) / \zeta^\dagger = -\zeta \text{ et } \text{tr} \zeta = 0 \}$
 ζ possède donc $18 - 9 - 1 = 8$ paramètres distincts.

DEF On introduit les matrices de Gell-Mann λ_i qui génèrent $\mathfrak{su}(3)$:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

→ On peut alors écrire:

$$\zeta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \zeta_8/\sqrt{3} & \zeta_1 - i\zeta_2 & \zeta_4 - i\zeta_5 \\ \zeta_1 + i\zeta_2 & \zeta_8/\sqrt{3} - \zeta_3 & \zeta_6 - i\zeta_7 \\ \zeta_4 + i\zeta_5 & \zeta_6 + i\zeta_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \zeta_8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 \zeta_a \lambda_a = \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\zeta}$$

→ La relation de fermeture de $\mathfrak{su}(3)$ est

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2} \quad \text{où les } f_{abc} \text{ sont les constantes de structure}$$

DEF Un champ de Yang-Mills ou champ de jauge non-abélien est un groupe dont les générateurs ne commutent pas entre eux
 $\Leftrightarrow f_{abc} \neq 0 \quad \forall a, b, c$

→ Soit $\vec{\alpha}$ le vecteur des paramètres caractérisant une transformation de valeur linéaire. Alors :

$$U(\vec{\alpha}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[U\left(\frac{\vec{\alpha}}{n}\right) \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + i \frac{\vec{T} \cdot \vec{\alpha}}{2} \frac{1}{n} \right]^n = e^{\frac{i}{2} \vec{T} \cdot \vec{\alpha}}$$

DEF On introduit la constante de couplage de l'interaction forte g tq

$$U(\vec{\alpha}) = \exp\left\{ i g \frac{\vec{T} \cdot \vec{\alpha}}{2} \right\}$$

→ On considère alors le Lagrangien de la théorie libre pour une particule massive de spin 1/2 :

$$\mathcal{L}_0 = \sum_q \bar{\Psi}_q^c(x) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi_q^c(x)$$

On impose que $\mathcal{L}_0$ soit invariant sous $\Psi_q^c \mapsto \Psi_q^{c'} = e^{i g \frac{\vec{T} \cdot \vec{\alpha}}{2}} \Psi_q^c(x)$.

On promeut alors $\partial_\mu \mapsto D_\mu = \partial_\mu + i g \frac{\vec{T} \cdot \vec{A}_\mu}{2}$
 $= \partial_\mu + i g \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a(x)$

→ On identifie les 8 potentiels-vecteurs $A_\mu^a(x)$ aux 8 gluons vecteurs de l'IF. Chacun d'entre eux est associé à l'un des 8 générateurs λ^a du groupe de symétrie $SU(3)_c$. Les champs de gluons déterminent l'amplitude de chacune des 8 rotations indépendantes réalisables dans l'espace du degré de liberté de couleur.

→ La dérivée covariante satisfait l'invariance de jauge locale :

$$D'_\mu \Psi_q^c(x) = \exp\left\{ i g \frac{\vec{T} \cdot \vec{\alpha}(x)}{2} \right\} D_\mu \Psi_q^c(x)$$

⊙ Tenseur de force de l'IF :

→ On considère une transformation infinitésimale $\vec{\zeta}(x)$ de la fct d'onde de couleur caractérisant le champ de matière :

$$\Psi_q^c(x) = \left(1 + i g \frac{\vec{T}}{2} \cdot \vec{\zeta}(x) \right) \Psi_q^c(x)$$

À l'ordre 1, on peut montrer que :

$$(\vec{\lambda} \cdot \vec{a})(\vec{\lambda} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - i f_{abc} \lambda_a b_b c_c$$

On obtient finalement :

Prop La transformation du champ de gluons $A_\mu^a(x)$ sous un changement de jauge infinitésimal $\vec{\zeta}(x)$ est :

$$A_\mu^a(x) \mapsto A_\mu^{\prime a} = A_\mu^a(x) - \partial_\mu \zeta^a(x) - g f_{abc} \zeta^b(x) A_\mu^c(x)$$

→ Les champs de jauge se transforment selon la rep. régulière de $SU(3)_c$

→ Afin de déterminer l'énergie cinétique de $\vec{A}^\nu(x)$, on applique :

$$[D_\mu, D_\nu] \vec{A}^\nu(x) = ig \frac{\lambda^a}{2} \left(\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \right) \vec{A}^\nu(x)$$

DEF Le tenseur de force de l'IF couleur est donné par :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x)$$

↳ $A_\mu^a(x)$ interagit avec lui-même ! Les gluons vecteurs de l'IF portent eux-mêmes une charge de couleur. La conservation de la couleur $\Rightarrow \exists (n^2-1)|_{n=3} = 8$ gluons, pourtant une couleur et anti-couleur.

DEF Le Lagrangien de la QCD s'écrit comme :

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi - \frac{1}{4} F^2$$

Explicitement, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{\text{jauge}}$ avec :

$$\rightarrow \mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}_q^c(x) [i \gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi_q^c(x)$$

$$\rightarrow \mathcal{L}_{\text{jauge}} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a = -\frac{1}{4} \left[\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) \right] \left[\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) \right] + (\text{termes } \propto f_{abc}) \rightarrow \text{dans } \mathcal{L}_I$$

$$\rightarrow \mathcal{L}_I = \bar{\Psi}_q^c(x) (-g \gamma^\mu A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}) \Psi_q^c(x)$$

$$= -g \bar{\Psi}_q^c(x) \gamma^\mu A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \Psi_q^c(x) + \frac{g}{2} f_{abc} \left[\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) \right] A_b^\mu(x) A_c^\nu(x) - \frac{g^2}{4} f_{abc} f_{dec} A_\mu^a(x) A_b^\mu(x) A_\nu^c(x) A_d^\nu(x)$$

- Puisque le champ de couleur couple à lui-même, il est impossible d'envisager le gluon comme une particule libre.
 ↳ Le vide de la QCD est le siège d'interactions

- Le paramètre g gouverne l'invariance de jauge. On la nomme constante de couplage de jauge.

2.3 Règles de Feynmann pour QCD

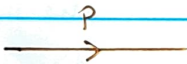
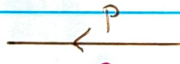
- Le lagrangien libre $\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi$ donne l'expression des propagat., donné par l'opérateur inverse des EOM.

Les règles pour les interactions sont traitées comme des perturbations et sont données par $\mathcal{L}_{int}$

La jauge covariante est représentée par ξ , qui définit la jauge.

Dans la jauge de Feynman, $\xi = 1$. Dans celle de Landau, $\xi = 0$

⊙ Particules externes:

	entrant	sortant
	$u(p, s)$	$\bar{u}(p, s)$
	$\bar{u}(p, s)$	$u(p, s)$
	$\epsilon_\mu(p, s)$	$\epsilon_\mu^*(p, s)$

- Relation d'orthogonalité:

$$(\not{p} - m)u = 0 = \bar{u}(\not{p} - m) \text{ et } (\not{p} + m)\bar{u} = 0 = \bar{u}(\not{p} + m)$$

- Relations de fermeture:

$$\sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s) = \not{p} + m \text{ et } \sum_s \bar{u}(p, s)u(p, s) = \not{p} - m$$

⊙ Propagateurs:



$$G^i_j(p) = \frac{i}{\not{p} - m} \delta^i_j = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \delta^i_j$$



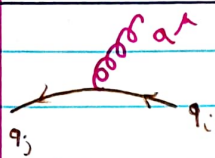
$$D_{\mu\nu}^{ab}(p) = \frac{-i\delta^{ab}}{p^2} \left(g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right)$$

conservation de la couleur

En jauge de Feynman:

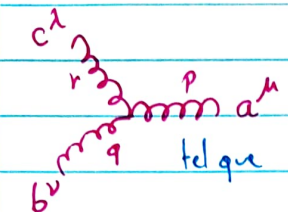
$$D_{\mu\nu}^{ab}(p) = \frac{-i\delta^{ab} g_{\mu\nu}}{p^2}$$

② Interactions:



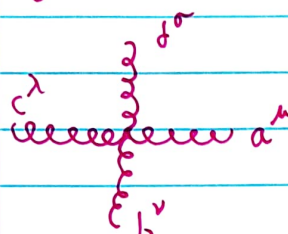
$$(\Gamma a^\mu)_i^j = i g \gamma^\mu (\lambda^a)_i^j$$

saveur q , couleur i



$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(p, q, r) = -g f^{abc} \begin{pmatrix} (p-q)_\lambda g_{\mu\nu} \\ + (q-r)_\mu g_{\nu\lambda} \\ + (r-p)_\nu g_{\mu\lambda} \end{pmatrix}$$

tel que $p+q+r=0$



$$\Gamma_{\mu\nu\lambda\sigma}^{abcd} = -ig^2 f^{abe} f^{cde} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda})$$

$$-ig^2 f^{ace} f^{bde} (g_{\mu\nu} g_{\sigma\lambda} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda})$$

$$-ig^2 f^{ade} f^{bce} (g_{\mu\nu} g_{\sigma\lambda} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma})$$

③ Remarques:

- Tout les vertex dépendent des indices de couleur des lignes croisées. Conventionnellement, on prend a, b, c, d pour les indices de couleur adjointes des gluons et i, j pour les quarks et anti-quarks.
- Le propagateur d'un quark est le même que celui d'un autre fermion, ou l'on a imposé la conservation de la couleur.
- Les lignes de gluon portent un vecteur de polarisation S^μ similaire à celui d'un photon, avec un indice de couleur en plus.
- Pour quantifier le QCD, il faut introduire des fantômes de Faddeev-Popov pour préserver l'invariance de jauge.
- L'existence d'auto-interaction des champs de jauge est responsable des propriétés de liberté asymptotique et de confinement de l'IP.

2.4 La liberté asymptotique

- La constante de couplage se comporte différemment en fct de la distance. Ce comportement est déterminé par la réponse du vide à la présence d'une charge, le principe d'incertitude permettant des fluctuations du vide en paire de particule-antiparticule pendant un temps $\propto 1/E$.

2.4.1 Effet d'écrantage en QED:

- Un paire part-antipart se polarise en présence d'une charge. Il faut donc spécifier la distance à laquelle on s'intéresse

DEF 1 La longueur d'onde de de Broglie $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

- En QED, l'effet d'écrantage de la charge électrique est calculé en sommant toutes les corrections de boucle e^+e^- au propagateur du photon: $\gamma^* \rightarrow (e^+e^-)^* \rightarrow \gamma^*$. On s'intéresse au couplage qui apparaît à chaque vertex:

- A l'ordre 1: $(-i)e_0 \gamma^\mu \cdot (-i) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \cdot (-i)e_0 \gamma^\nu = ie_0^2 \gamma^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \gamma^\nu$
représenté par:



- A l'ordre 2:



$$(-i)e_0 \gamma^\mu \cdot (-i) \frac{g_{\mu\lambda}}{q^2} \cdot (-i) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[(-i)e_0 \gamma^\rho \frac{i(k+m)}{k^2-m^2} (-i)e_0 \gamma^\nu \frac{i(k-q+m)}{(k-q)^2-m^2} \right] \times (-i) \frac{g_{\lambda\nu}}{q^2} (-i)e_0 \gamma^\nu$$

En effet, $\sum_{\alpha, \beta, \mu, \nu} \gamma_\mu^\alpha (k+m)_{\beta\alpha} \gamma_\nu^\lambda (k-q+m)_{\nu\beta} =$

$$= \text{Tr} [\gamma^\rho (k+m) \gamma^\lambda (k-q+m)]$$

$$= 4 g^{\rho\lambda} (m^2 - k \cdot (k-q)) + 8 k^\rho k^\lambda - 4 (k^\lambda q^\rho + k^\rho q^\lambda)$$

On somme sur les états d'hélicité des fermions de la boucle

① Divergence et cut-off UV:

→ Le calcul du la boucle fait intervenir le terme:

$$\int \frac{d^4 k}{2\pi} \text{Tr}[\dots] \propto \int \frac{d^4 k}{(k^2 - m^2)^2} = \int \frac{k^3}{(k^2 - m^2)^2} dk d\Omega \propto \int_0^\infty \frac{dk}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

↳ C'est la divergence ultraviolette, qui est logarithmique: $\int dk/k$

DEF On introduit un cut-off ultraviolet μ_R tq $\int_0^\infty \frac{dk}{k} \mapsto \int_0^{\mu_R} \frac{dk}{k}$

→ L'intégrale laisse alors une divergence en q^2/μ_R^2 :

$$ie_0^2 \gamma^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \gamma^\nu \left[1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left[\frac{m^2 - q^2}{\mu_{UV}^2} \right] + \frac{e_0^2}{12\pi^2} F(q^2) \right]$$

avec $F(q^2)$ tel que $\lim_{q^2 \rightarrow \infty} F(q^2) = 0$ et $\max\{F\} < \infty$

DEF On introduit la charge renormalisée en ne gardant que le terme de correction logarithmique (Leading Log Approximation - LLA)

? juste?

$$e_0^2 \equiv e_0^2 \left(1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left[\frac{m^2 - q^2}{\mu_{UV}^2} \right] \right)$$

Pour des diagrammes aux ordres supérieurs, on introduit

$$\alpha_0 \equiv e_0^2 / 4\pi$$

→ On obtient alors:

$$\alpha_{em}^{eff}(\mu_{UV}^2) = \alpha_0 \left(1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left[\frac{m^2 - q^2}{\mu_{UV}^2} \right] + \left(\frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left[\frac{m^2 - q^2}{\mu_{UV}^2} \right] \right)^2 + \dots \right)$$

$$\simeq \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left[Q^2 / \mu_{UV}^2 \right]} \quad \text{en posant } \frac{m^2 - q^2}{\mu_{UV}^2} \simeq Q^2$$

De manière équivalente,

$$e_{eff}^2(Q^2) = \frac{e_0^2}{1 - \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left[Q^2 / \mu_{UV}^2 \right]}$$

→ La constante de couplage dépend donc de la charge, dont la dépendance en la distance est, asymptotiquement,

$$e^2(r) = \frac{e^2}{1 + \frac{2e^2(r_0)}{3\pi} \ln[r/r_0]} \quad \text{où } r_0 = \frac{1}{\mu_0}$$

② Discussion:

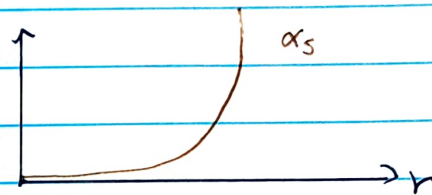
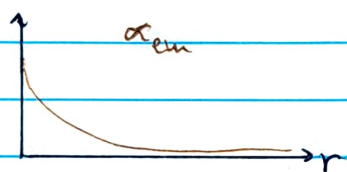
→ A grand distance, $r \gg r_0$, on peut négliger la dépendance en la charge vue $e(r_0)$:

$$e'(r) \simeq \frac{3\pi}{2 \ln(r/r_0)}$$

→ A courte distance, $r \rightarrow 0$, le logarithme $\ln(r/r_0) \rightarrow \infty$. Or, si $e(r_0)$ est fini, $e(r) \rightarrow 0 \forall r$: paradoxe!

↳ En fait, lorsque $r \rightarrow 0$, $e(r_0) \rightarrow \infty$: pas de traitement perturbatif possible. Le problème fut résolu par Gribor via la procédure dite de renormalisation.

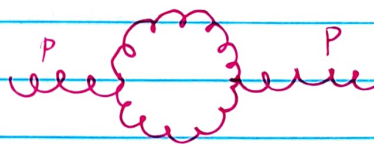
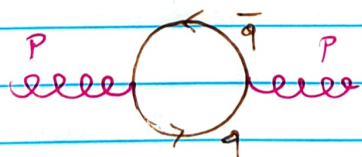
→ Pour $r \gg r_0$, on retrouve $\alpha_{em} \simeq 1/137$



2.4.2 La constante de couplage de QCD:

DEF 1 En QCD, la liberté asymptotique correspond à un effet d'anti-écranage: le couplage augmente avec la distance.

→ On calcul également des corrections de boucles aux propagateurs du boson de jauge:



↳ couleur fixée, pas la saveur.

↳ La boucle de quark est similaire au cas QED, avec:

→ un facteur $\text{Tr}[\lambda^a \lambda_a] = 1/2$

→ somme sur les saveurs, aux nombres de N_f

- ↳ La boucle de gluons a une expression similaire avec :
- un signe +1 car c'est un boson
 - une somme sur les couleurs

DEF 1 On introduit la constante de couplage forte $\alpha_s \equiv \frac{g^2}{4\pi}$

→ On obtient :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu_R^2)}{1 - \frac{2N_f - 11N_c}{6\pi} \alpha_s(\mu_R^2) \ln[Q^2/\mu_R^2]}$$

Le terme $11N_c$ $\Leftarrow$ gluons, et celui $2N_f$ $\Leftarrow$ quarks.

- ↳ Les quarks induisent un effet d'écrantage et les gluons d'anti-écrantage. L'effet de compétition s'annule pour $N_f = 11 N_c / 2$

2.4.3 Petite discussion :

→ Considérons un milieu le vide dans un milieu continu avec une constante diélectrique ϵ . Elle est liée à la perméabilité magnétique μ selon

$$\epsilon \cdot \mu = 1 = 1/c^2$$

→ Un milieu diamagnétique (effet d'écrantage) correspond à $\mu < 1$ et un milieu paramagnétique (anti-écrantage) à $\mu > 1$

→ Quand un e^- se déplace dans un $\vec{B}_{ext}$, 2 effets apparaissent :

- 1) le courant induit (direction opposée, effet diamagn.)
- 2) le spin s'aligne sur $\vec{B}_{ext}$ (effet paramagn.)

↳ En QED, l'effet diamagn l'emporte : écrantage

↳ En QCD, les gluons portent une charge de couleur et ont un spin plus élevé que les q et e^- .

→ La charge de couleur tend $\rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0$.

DEF

On définit le paramètre Λ_{QCD} par

$$\Lambda_{QCD}^2 \equiv \mu^2 \exp\left\{-\frac{4\pi}{\beta_0 \alpha_s(\mu^2)}\right\}$$

qui correspond à Q^2 tq $\frac{2N_f - 11N_c}{6\pi} \alpha_s(\mu^2) \ln[Q^2/\mu^2] = 1$

→ Cette grandeur indique le pivot entre le régime perturbatif et non-perturbatif, et donc l'énergie à laquelle les eq. du groupe de renormalisation cessent d'être valables.

En effet, $\alpha_s(Q) \xrightarrow{Q \rightarrow \Lambda_{QCD}} \infty$

→ Λ_{QCD} est un paramètre libre de QCD. Pour $Q = M_Z$, on obtient $\Lambda_{QCD} \sim 0,1 \text{ GeV}$

2.5 Le potentiel de QCD

→ Les quarks isolés n'ayant jamais été observés, on suppose qu'ils sont confinés au sein des hadrons.

2.5.1 Etats de couleur du gluon:

DEF

On définit 8 états de couleur du gluon orthonormés

→ Un octet:

$$G_1 \equiv r\bar{g}$$

$$G_2 \equiv r\bar{b}$$

$$G_3 \equiv g\bar{r}$$

$$G_4 \equiv g\bar{b}$$

$$G_5 \equiv b\bar{r}$$

$$G_6 \equiv b\bar{g}$$

$$G_7 \equiv \sqrt{\frac{1}{2}}(r\bar{r} - g\bar{g})$$

$$G_8 \equiv \sqrt{\frac{1}{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$$

→ Un singlet: $G_0 \equiv \sqrt{\frac{1}{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$

représentation
de $3 \otimes 3$?

Prop

Seuls les états antisymétriques sous permutation de 2 couleurs sont réalisés dans la nature

→ $\{G_i\}_{i=1}^8$ existe

→ G_0 n'existe pas. De plus, il ne porte pas de couleur, il ne réalise pas l'IF.

2.5.2 Le facteur de couleur :

DEF

La fonction d'onde d'un quark peut être exprimée comme le produit d'un spineur de Dirac et d'une fonction d'onde de couleur (χ_c) :

$$\Psi \equiv \psi(x) \cdot \chi_c \quad \text{avec :}$$

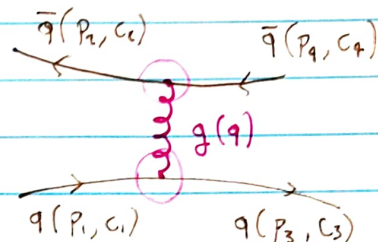
$$\chi_r \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_g \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_b \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

① Diffusion de 2 quarks au tree-level :

→ L'élément de matrice correspondant s'écrit :



$$i\mathcal{M} = \left(\bar{u}(p_3) \chi_3^\dagger \left(-i \frac{g \lambda^a}{2} \gamma^\mu \right) u(p_1) \chi_1 \right) \frac{-i g_{\mu\nu} \delta^{ab}}{q^2} \left(\bar{v}(p_4) \chi_4^\dagger \left(-i \frac{g \lambda^a}{2} \gamma^\nu \right) v(p_2) \chi_2 \right)$$

$$= i g^2 \frac{1}{q^2} \left(\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \right) \left(\bar{v}(p_4) \gamma^\nu v(p_2) \right) \underbrace{\frac{1}{4} (\chi_3^\dagger \lambda^a \chi_1) (\chi_2^\dagger \lambda^a \chi_2)}_{C_F}$$

C_F

→ On obtient à une constante de couplage près la même expression que dans QED pour la diffusion $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ multiplié par un facteur de couleur C_F

Prop

Pour les interactions abéliennes (pas d'interaction gluon-gluon), on peut toujours factoriser C_F et avoir " $i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_{\text{QED}} \cdot C_F$ "

② Force attractive ou répulsive ?

→ Dans QED, le signe de la force e-m est donnée par $e_1 e_2 \alpha$, avec $\alpha > 0$. De façon équivalente dans QCD, on peut décomposer C_F en $\frac{1}{2} C_1 C_2$ (facteur 1/2 historique)

Prop

Une interaction ayant un facteur de couleur $C_F \propto \frac{1}{2} C_1 C_2 \propto s$
 attractive pour $C_F < 0$
 répulsive pour $C_F > 0$

③ Exemple: diffusion $q_r \bar{q}_r \rightarrow q_r \bar{q}_r$:



→ Le facteur de couleur vaut:

$$C_F = \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \left[(1 \ 0 \ 0) \lambda^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[(1 \ 0 \ 0) \lambda^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad \chi_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} (\lambda^{\alpha})_{11} (\lambda^{\alpha})_{11} = \frac{1}{4} ((\lambda^1)^2_{11} + (\lambda^3)^2_{11} + (\lambda^8)^2_{11})$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 1/3$$

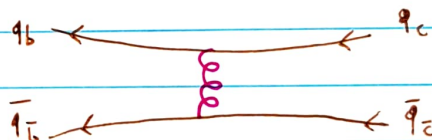
Une autre manière d'obtenir ce résultat est de regarder quels gluons possèdent un terme $\propto r \bar{r}$: il s'agit de G_3 et G_8 . On trouve:

$$C_F = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \right) = 1/3$$

→ La force sera donc répulsive!

→ Le résultat sera le même pour $g \bar{g}$ et $b \bar{b}$, comme vérifié par la symétrie de couleur.

③ Exemple: état singlet $q \bar{q}$:



→ Considérons un méson, état singlet de couleur:

$$q \bar{q} = \frac{1}{\sqrt{3}} (q_r \bar{q}_r + q_g \bar{q}_g + q_b \bar{q}_b) = \frac{1}{\sqrt{3}} (r \bar{r} + g \bar{g} + b \bar{b}) \sim G_0$$

→ Le facteur de couleur est: (on considère 1 couleur et on mult. par 3)

$$C_F(q \bar{q}) = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot C_F(q_b \bar{q}_b)$$

initial $\leftarrow$ $\rightarrow$ final

→ Les gluons ayant une couleur bleue sont $G_5 (q_b q_b \rightarrow q_r \bar{q}_r)$,

$G_6 (q_b \bar{q}_b \rightarrow q_g \bar{q}_g)$ et $G_8 (q_b \bar{q}_b \rightarrow q_b \bar{q}_b)$:

$$C_F = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{6}} + 1 \cdot -1 + 1 \cdot -1 \right) = -\frac{4}{3}$$

(Les signes (-) sont dus aux anti-particules)

→ La force est attractive!

Prop Le facteur de couleur d'un (anti) baryon qqq est $C_F^{qqq} = 2/3$

2.5.3 Le potentiel:

→ Le potentiel qui représente l'interaction QCD entre un quark et un anti-quark dans un état de couleur singulet est dit de "fonnel".

DEF

Le potentiel de fonnel V_{QCD} est donné par

$$V_{QCD}(r) = C_F \frac{\alpha_s}{r} + k \cdot r = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + k r$$

où k est la tension de la corde, $k \approx 1 \text{ GeV fm}^{-1}$

↳ Ce potentiel est compatible avec les calculs non perturbatifs de la lattice QCD

↳ Ce potentiel possède 2 régimes:

→ Coulombien si $r \ll 1/k$ et linéaire si $r \gg 1/k$

① Partie coulombienne:

→ Due au propagateur des gluons. Pour $q^2 \ll M^2$ (approx non-rela), le potentiel est $\propto$ transfo de Fourier du propagateur des gluons:

$$V_{QCD}(r) = -g^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot r} \cdot \frac{1}{-p^2} = g^2 \cdot \frac{e}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{\sin(p \cdot |r|)}{p \cdot |r|}$$
$$= \frac{g^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{|r|} = \frac{\alpha_s}{|r|} \quad \left(\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi/2 \right)$$

↳ On retrouve la forme classique du potentiel Coulombien

② Partie linéaire:

→ Correspond au régime non-perturbatif, donc diagrammes de Feynmann inutiles.

→ Lorsque la distance de séparation entre les 2 quarks devient de l'ordre de 1 fm , les lignes de champs des gluons s'attirent réciproquement et forment un tube. Si on les écarte encore, le tube s'allonge avec $F = -dV/dr$ constante. Si $r > 1.35 \text{ MeV}^{-1} \approx m_\pi$, il y a fragmentation: une paire $q\bar{q}$ est créée.