La correspondance de McKay

13 novembre 2023

Table des matières

1 Introduction

La correspondance de McKay, découverte en 1980 par le mathématicien Australien John McKay, est une relation étonnante entre les sous-groupes discrets finis $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{C})$ et les algèbres de Lie semi-simples $\mathbf{g}$ que vous étudierez dans la deuxième moitié du cours.

L'observation consiste, d'une part, à dessiner des graphes encodant toutes les représentations irréductibles des groupes Γ, et certaines relations entre elles. D'autre part, vous verrez plus tard que les algèbres de Lie semi-simples peuvent êtres représentées (dans le sens non-technique) par des diagrammes nommés "diagrammes de Dynkin". La correspondence entre les groupes finis Γ et les algèbres de Lie $\mathbf{g}$ se découvre en constatant que ces diagrammes sont isomorphes.

2 Définition d'un graphe de McKay

Soit G un groupe fini quelconque, et $\{\rho_i, V_i\}$ un système complet de représentations irréductibles, i.e. toute représentation (ρ, V) admet une décomposition en une somme directe de représentations irréductibles dans ce système, $(\rho, V) \cong \bigoplus_i (\rho_i, V_i)$.

Un graphe de McKay se définit par rapport à un choix d'une représentation de G arbitraire (pas nécessairement irréductible). On choisit une représentation (ρ_W, W) que l'on appellera la 'représentation choisie'.

Le graphe de McKay de G par rapport à la représentation choisie (ρ_W, W) se dessine ainsi :

1. Pour chaque représentation irréductible dans le système complet $\{\rho_i, V_i\}$, on dessine un point/nœud.

2. Pour chaque représentation irréductible (ρ_i, V_i), on calcule le produit tensoriel de représentations $(\rho_W, W) \otimes (\rho_i, V_i)$, et on décompose le résultat en représentations irréductibles :

$$(\rho_W, W) \otimes (\rho_i, V_i) = \bigoplus_j (\rho_j, V_j)^{\oplus n_{ij}} , \tag{1}$$

   où n_{ij} est la multiplicité de (ρ_j, V_j) dans la décomposition de $(\rho_W, W) \otimes (\rho_i, V_i)$.

3. Pour chaque $n_{ij} > 0$ dans la somme directe, on trace n_{ij} flèches du nœud attribué à (ρ_i, V_i) au nœud attribué à $(\rho_j V_j)$.

Le graphe de McKay s'appelle aussi 'carquois de McKay' ('McKay quiver' en Anglais), étant donné qu'il contient des flèches.

3 Sous groupes discrets de $SL(2, \mathbb{C})$

On s'intéressera en particulier aux sous-groupes discrets de $SL(2, \mathbb{C})$. On commence par citer quelques propriétés qui motivent l'étude de ces groupes.

Propriété 3.1 *Tout sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de $SU(2, \mathbb{C})$.*

Propriété 3.2 *Il existe un homomorphisme de groupes $\pi : SU(2, \mathbb{C}) \longrightarrow SO(3, \mathbb{R})$, dont le noyau est $\pm \mathrm{id}_2$, et $SO(3, \mathbb{R}) \cong SU(2, \mathbb{C})/\{\pm \mathrm{id}_2\}$.*

Propriété 3.3 *Les sous-groupes finis de $SO(3, \mathbb{R})$ sont exactement les groupes cycliques $\mathcal{C}_n$, les diédraux $\mathcal{D}_m$, A_4 (groupe du tétraèdre), S_4 (groupe de l'octaèdre) et A_5 (groupe de l'isocaèdre).*

Propriété 3.4 *Soit Γ un sous-groupe fini de $SU(2, \mathbb{C})$. Alors, soit Γ est un groupe cyclique d'ordre impair, soit $|\Gamma|$ est pair, et $\Gamma = \pi^{-1} \circ \pi(\Gamma)$ est ismorphe à l'image inverse du sous-groupe fini $\pi(\Gamma) \subset SO(3, \mathbb{R})$.*

Résumé. On peut résumer cette dernière propriété ainsi : Posons $\Gamma \subset SU(2, \mathbb{C})$, et $\tilde{\Gamma} \subset SO(3, \mathbb{R})$ tels que $\pi(\Gamma) = \tilde{\Gamma}$ où $\pi : SU(2) \mapsto SO(3)$ est la projection canonique $2:1$. Alors, nous avons deux cas possibles :

1. $|\Gamma|$ est pair. Alors, la propriété 3.4 nous dit que Γ est un revètement double de $\tilde{\Gamma}$, avec nouyau $\pm \mathrm{id}_2$.

2. $|\Gamma|$ est impair. Alors, $\Gamma \cong \tilde{\Gamma}$. D'ailleurs, dans ce cas là, Γ est un groupe cyclique $\mathcal{C}_{2n+1}$.

Donc, en étudiant les sous-groupes discrets de $SL(2, \mathbb{C})$, on étudie les symmétries des solides Platoniens, à travers leurs revètements doubles sous l'application $\pi : SU(2, \mathbb{C}) \longrightarrow SO(3, \mathbb{R})$.

Théorème 3.1 *Les sous-groupes discrets de* $SL(2, \mathbb{C})$ *sont, à conjuguaison près, les groupes suivants, appellés 'groupes polyédraux binaires'. Définissons* $\zeta_m = \exp(2\pi i/m)$ *comme étant la* $m-$*ièmme racine de l'unité,* $(\zeta_m)^m = 1$.

- $\mathcal{C}_m$ *: Les groupes cycliques d'ordre* m*, où* $m \geq 2$*, générés par les matrices*
$$\begin{pmatrix} \zeta_m & 0 \\ 0 & \zeta_m^{-1} \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{D}_m$ *: Les groupes binaires diédraux d'ordre* $4\,m$*, avec* $m \geq 1$*, générés par les matrices*
$$A = \begin{pmatrix} \zeta_{2m} & 0 \\ 0 & \zeta_{2m}^{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{T}$ *: Le groupe binaire tétraédral d'ordre* 24*, généré par* $\mathcal{D}_2$ *(définit ci-dessus), et la matrice*
$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta_8 & \zeta_8^3 \\ \zeta_8 & \zeta_8^7 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{O}$ *: Le groupe binaire octaédral d'ordre* 48*, généré par* $\mathcal{T}$ *(définit ci-dessus) et la matrice*
$$D = \begin{pmatrix} \zeta_8^3 & 0 \\ 0 & \zeta_8^5 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{I}$ *: Le groupe binaire icosaédral d'ordre* 120*, généré par les matrices*
$$E = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \zeta_5^4 - \zeta_5 & \zeta_5^2 - \zeta_5^3 \\ \zeta_5^2 - \zeta_5^3 & \zeta_5 - \zeta_5^4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \zeta_5^2 - \zeta_5^4 & \zeta_5^4 - 1 \\ 1 - \zeta_5 & \zeta_5^3 - \zeta_5 \end{pmatrix}$$

Pour chacun de ces groupes, on prendra comme représentation choisie (ρ_W, W) *la représentation 2-dimensionelle qui figure dans la définition du groupe.*

4 Énoncé

Pour dessiner les graphes de McKay on doit connaitre toutes les représentations irréductibles des groupes énumérés dans le théorème 3.1. Le travail personnel est donc divisé en deux parties :

1. Dans la premiere partie on doit construire les tables des caractères des groupes des séries infinies $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{D}_m$. Les tables des charactères des autres groupes $\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$ et $\mathcal{I}$ vous seront données.

2. Dans la deuxième partie on doit utiliser ces tables plus des informations suplémentaires qui vous seront données (pour vous simplifier la tâche) pour dessiner le graphes de McKay des tous les sous-groupes discrets de $SL(2, \mathbb{C})$.

4.1 Représentations irréductibles des groupes $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{D}_m$

1. Construisez toutes les représentations irréductibles de $\mathcal{C}_n$.

   Indice : $\mathcal{C}_n$ est isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$ definit par $< e, g, g^2, \ldots, g^{n-1} >$, avec $g^n = e$.

2. Construisez toutes les représentations irréductibles de $\mathcal{D}_n$ en utilisant les étapes suivantes :

   (a) Prouvez que les matrices A and B définies dans le théorème 3.1 satisfont les relations suivantes :

$$A^{2n} = B^4 = 1\,, \tag{2}$$

$$A^n = B^2\,, \tag{3}$$

$$AB = BA^{-1}\,. \tag{4}$$

   (b) Identifiez toutes les classes de conjugaison de $\mathcal{D}_n$.
   Indice : cataloguez les elements du groupe comme

$$\mathcal{D}_n = \{A^a, BA^b, B^2A^c, B^3A^d \mid 0 \leq a, b, c, d \leq n-1\}$$

   et utilisez les relations du point (a).

   (c) Identifiez toutes les représentations irréductibles de dimension 1 de $\mathcal{D}_n$.

   (d) Prouvez que toutes les représentations irréductibles de $\mathcal{D}_n$ de dimension différente de 1 ont dimension 2.

   (e) Construisez explicitement toutes les représentations irréductibles de $\mathcal{D}_n$ de dimension 2.

   Indice : La représentation irréductible 2-dimensionelle définissante (ρ_W, W) est facilement généralisable en ce qui concerne l'élément A. On peut ensuite fixer la forme de B en imposant que l'équation (3) soit toujours satisfaite.

(f) Construire la table des caractères associée au groupe $\mathcal{D}_n$.

Pour les groupes $\mathcal{T}, \mathcal{O}$ et $\mathcal{I}$, les tables de charactères sont les suivantes :

- Charactères de $\mathcal{T}$:

representative	e	B^2	B	C	C^2	C^4	C^5
|class|	1	1	6	4	4	4	4
V_0	1	1	1	1	1	1	1
V_1	2	-2	0	1	-1	-1	1
V_2	3	3	-1	0	0	0	0
V_3	2	-2	0	ζ_3	$-\zeta_3$	$-\zeta_3^2$	ζ_3^2
$V_3^\vee$	2	-2	0	ζ_3^2	$-\zeta_3^2$	$-\zeta_3$	ζ_3
V_4	1	1	1	ζ_3	ζ_3	ζ_3^2	ζ_3^2
$V_4^\vee$	1	1	1	ζ_3^2	ζ_3^2	ζ_3	ζ_3

- Charactères de $\mathcal{O}$:

representative	e	B^2	B	C	C^2	D	BD	D^3
|class|	1	1	6	8	8	6	12	6
V_0	1	1	1	1	1	1	1	1
V_1	2	-2	0	1	-1	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$
V_2	3	3	-1	0	0	1	-1	1
V_3	4	-4	0	-1	1	0	0	0
V_4	3	3	-1	0	0	-1	1	-1
V_5	2	-2	0	1	-1	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$
V_6	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
V_7	2	2	2	-1	-1	0	0	0

- Charactères de $\mathcal{I}$ (où $\varphi^\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$) :

representative	e	E^2	E	F	F^2	EF	$(EF)^2$	$(EF)^3$	$(EF)^4$
|class|	1	1	30	20	20	12	12	12	12
V_0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
V_1	2	-2	0	1	-1	φ^+	$-\varphi^-$	φ^-	$-\varphi^+$
V_2	3	3	-1	0	0	φ^+	φ^-	φ^-	φ^+
V_3	4	-4	0	-1	1	1	-1	1	-1
V_4	5	5	1	-1	-1	0	0	0	0
V_5	6	-6	0	0	0	-1	1	-1	1
V_6	4	4	0	1	1	-1	-1	-1	-1
V_7	2	-2	0	1	-1	φ^-	$-\varphi^+$	φ^+	$-\varphi^-$
V_8	3	3	-1	0	0	φ^-	φ^+	φ^+	φ^-

4.2 Graphes de McKay

Pour cette deuxième partie du travail personnel, on vous demande de construire les graphes de McKay pour tous les sous-groupes discrets de $SL(2, \mathbb{C})$. Pour chaque groupe, la "représentation choisie" (ρ_W, W) est toujours la représentation 2-dimensionelle qui apparait dans la définition du groupe dans le théorème (3.1).

Notez bien que, pour $\mathcal{C}_n$, la représentation (ρ_W, W) est réductible!

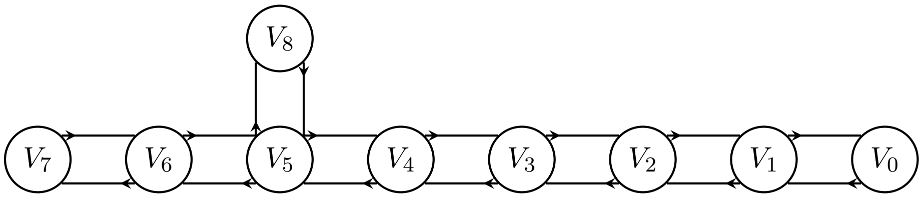
Dessinez donc les graphes de McKay pour tous les sous-groupes discrets de $SL(2, \mathbb{C})$. Le but est d'observer que ces diagrammes correspondent aux *diagrammes de Dynkin étendus*, ou *diagrammes de Dynkin affines* des algèbres de Lie semisimples.

1. Dans les cas des séries infinies $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{D}_m$, dessinez les premiers deux exemples : $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$, et $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$. Charactérisez ensuite comment ces séries se dessinent.

2. Pour les groupes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{O}$ dessinez les graphes en question, sachant que $(\rho_W, W) = (\rho_{V_1}, V_1)$.

   Indice : Pour identifier les décompositions des produits tensoriels avec $\rho_W = V_1$, il suffit d'utiliser les charactères évalués sur les classes de conjugaison des éléments e, B, C pour le groupe $\mathcal{T}$ et e, B, C, D pour le groupe $\mathcal{O}$.

3. **Option libre** : Pour $\mathcal{I}$ vous pouvez vérifier que, en le choix $W = V_1$ donne le graphe suivant :



c'est à dire

$$W \otimes V_0 \cong V_1\,, \quad W \otimes V_1 \cong V_0 \oplus V_2 \quad \dots \quad W \otimes V_5 \cong V_4 \oplus V_6 \oplus V_8 \quad \text{etc.}$$