**Travail personnel : les algèbres de Lie $so(n)$**

# 1 $so(n)$

On considère l'algèbre de Lie so$(n)$, c'est-à-dire l'algèbre de Lie des matrices $n\times n$ réelles antisymétriques. Introduisons $n^2$ matrices $n \times n$ réelles antisymétriques $M_{pq}$ définies par

$$(M_{pq})_{jk} \equiv \delta_{pj}\delta_{qk} - \delta_{pk}\delta_{qj} \quad (j, k = 1, \ldots, n).$$

On vérifie facilement que

$$[M_{pq}, M_{rs}] = \delta_{qr}M_{ps} - \delta_{qs}M_{pr} - \delta_{pr}M_{qs} + \delta_{ps}M_{qr}.$$

et que

$$M_{pq} = -M_{qp}.$$

Une base de $so(n)$ est donnée par les $\frac{1}{2}n(n-1)$ matrices $M_{pq}$ $(p < q = 1, \ldots, n)$. Comme ces matrices sont également linéairement indépendantes sur les complexes, elles forment également une base de la complexification de so$(n)$. On note que la forme de Killing sur so$(2l + 1), l \in \mathbb{N}_0$ est donnée par

$$B(M_{pq}, M_{rs}) = -2(2l - 1)\delta_{pr}\delta_{qs},$$

et que celle sur so$(2l)$ est donnée par

$$B(M_{pq}, M_{rs}) = -4(l - 1)\delta_{pr}\delta_{qs}.$$

1. $\boxed{\mathrm{so}(2l+1)}$, $l = 1, 2, \ldots$ :
   (a) Construire une base $\{h_1, \ldots, h_r\}$ de la sous-algèbre de Cartan et en déduire le rang de l'algèbre.
   (b) Soient les matrices $e_j \equiv M_{2j,2l+1} - iM_{2j-1,2l+1}$ $(j = 1, \ldots, l)$. Montrer que $[h_k, e_j] = \delta_{kj}e_j$.
   (c) Construire toutes les racines.
   **Indice** : Le point précédent vous fournit déjà un certain nombre de racines. D'autre part, si vous connaissez le rang et la dimension de l'algèbre, vous pouvez facilement déduire le nombre de racines qu'il vous reste à trouver.
   (d) Identifier les racines positives, puis les racines simples $\alpha_i$.
   (e) (Facultatif) Construire les générateurs de Cartan $h_i$ associés aux $\alpha_i$ en utilisant $B(h_i, h_j) = \alpha_i(h_j)$.

(f) Calculer les produits scalaires entre les racines simples $\alpha_i \cdot \alpha_j$.

(g) Écrire la matrice de Cartan de $so(2l+1)$ et construire le diagramme de Dynkin associé. Cela identifie $so(2l+1)$ avec $B_l$.

2. $\boxed{\mathrm{so}(2l)}$, $l = 1, 2, \ldots$ :

   (a) Construire une base $\{h_1, \ldots, h_r\}$ de la sous-algèbre de Cartan et en déduire le rang de l'algèbre.

   **Indice** : Vous pourrez constater que les $h_j$ de $so(2l)$ sont les $h_j$ de $so(2l+1)$ dont on a retiré la dernière ligne et la dernière colonne de 0. Plus généralement, si une matrice de $so(2l+1)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_{2l\times 2l} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   alors $A_{2l\times 2l}$ est une matrice de $so(2l)$. Cela peut vous aider pour le point suivant.

   (b) Construire toutes les racines.

   (c) Identifier les racines positives, puis les racines simples $\alpha_i$.

   (d) (Facultatif) Construire les générateurs de Cartan $h_i$ associés aux $\alpha_i$ en utilisant $B(h_i, h_j) = \alpha_i(h_j)$.

   (e) Calculer les produits scalaires entre les racines simples $\alpha_i \cdot \alpha_j$.

   (f) Écrire la matrice de Cartan de $so(2l)$ et construire le diagramme de Dynkin associé.