Antoine
DIERCKX

Travail personnel - Correspondance de McKay

01

PARTIE 1 :

① Construction des irreps de C_n :

Puisque $C_n \cong \mathbb{Z}_n$ est abélien, les classes de conjugaison ne contiennent qu'un seul élément. Or, le nombre d'irrep d'un groupe est égal au nombre de classes de conjugaison. Ainsi, il y a n irreps. Par le théorème de Burnside, elles sont toutes de dimension 1. On a donc :

→ T_0 la rep. triviale avec $T_0(a) = 1 \quad \forall a \in C_n$

→ $\{T_i\}_{i=1,\dots,n-1}$ avec $T_i(e) = 1$, $T_i(a^n) = 1$

$\Leftrightarrow T_k(a) = e^{(2i\pi/n)k} = \zeta_n^k$ et $T_k(a^j) = \exp(jk2\pi i/n)$

avec $k = 1, \dots, n-1$

② a) On rappelle que $A = \mathrm{diag}(e^{i\pi/m}, e^{-i\pi/m})$, $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

→ Montrer que $A^{2n} = B^4 = 1$

↳ $A^{2m} = \mathrm{diag}(e^{2i\pi}, e^{-2i\pi}) = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$

↳ $B^4 = B^2 . B^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} . B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$

→ Montrer que $A^n = B^2$

↳ $A^n = \mathrm{diag}(e^{i\pi}, e^{-i\pi}) = -\mathbb{1}_2$

↳ $B^2 = -\mathbb{1}_2$ Ainsi, $A^n = B^2$

→ Montrer que $AB = BA^{-1}$

↳ $A^{-1} = \mathrm{diag}(e^{-i\pi/m}, e^{i\pi/m})$

↳ $BA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\pi/m} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ie^{i\pi/m} \\ ie^{-i\pi/m} & 0 \end{pmatrix}$

↳ $AB = \begin{pmatrix} e^{i\pi/m} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ie^{i\pi/m} \\ ie^{-i\pi/m} & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, $AB = BA^{-1}$

Antoine DIERCKX 02

② b) On a $D_n \overset{?}{=} \{A^a, BA^b, B^2A^c, B^3A^d / 0 \leq a,b,c,d \leq n-1\}$

→ Commençons par remarquer que $e = A^0 = A^{2n} = B^4$ ainsi que

$A^j = \text{diag}(e^{\pi i j/n}, e^{-\pi i j/n})$

De plus, $(A^j)^{-1} = A^{-j} = A^{2n-j} = A^n A^{n-j} = B^2 A^{n-j}$

$B^{-1} = B^3$

· Ainsi, on peut atteindre toutes les puissances de A et B via :

$\{A^j, B^k / j = 0, \dots, 2n-1 \text{ et } k = 1,2,3\}$

→ De plus, on sait que $A^n = B^2$. Ceci nous permet d'exprimer

$\{A^j / n \leq j \leq 2n-1\}$ comme $\{B^2A^j / j = 0, \dots, n-1\}$

→ Ensuite, considérons la famille d'éléments BA^j :

$BA^j = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\pi i j/n} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i j/n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ie^{-\pi i j/n} \\ ie^{\pi i j/n} & 0 \end{pmatrix}$ $j = 0, \dots, n-1$

On incrémente ensuite les puissances de B :

B^2A^j (déjà considéré)

$B^3A^j = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} A^j = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-\pi i j/n} \\ -ie^{\pi i j/n} & \end{pmatrix}$

$B^4A^j = A^j$

$B^5A^j = BA^j$. Ainsi, il suffit considérer les puissance ≤ 3.

↳ On a donc cataloguer les éléments du groupe comme

$D_n = \{A^a, BA^b, B^2A^c, B^3A^d / 0 \leq a,b,c,d \leq n-1\}$

→ On cherche à présent les classes de conjugaison :

$[g] \equiv \{hgh^{-1} / h \in G\}$

→ $[e] = [A^0] = \{e\}$

→ $[A^a]$ avec $a = 1, \dots, n-1$ fixé

↳ $A^k A^a A^{-k} = A^a \Rightarrow \{A^j / j = 1, \dots, n-1\} \subset [A^a]$

↳ $(BA^k)A^a(BA^k)^{-1} = BA^kA^aA^{-k}B^{-1} = BA^kA^aA^{-k}B^3$

$= BA^aB^3 = B^2A^{-a}B^2 = B^3A^aB = B^4A^{-a} = A^{-a} = B^2A^{n-a}$

$\Rightarrow \{B^2A^{n-a} / a = 1, \dots, n-1\} \subset [A^a]$

Antoine
D.iEKCKX
03

↳ $(B^2A^k)A^a(B^2A^k)^{-1} = B^2A^kA^aA^{-k}(B^2)^{-1} = B^2A^aB^2 = B^4A^a = A^a$

↳ $(B^3A^k)A^a(B^3A^k)^{-1} = B^3A^a(B^3)^{-1} = B^3A^aB = A^{-a} = B^2A^{n-2}$

On trouve finalement que $[A^a] = \{A^a, B^2A^{n-a} \,/\, a=1,\dots,n-1\}$

→ $[BA^b]$ avec $b=0,\dots,n-1$ fixé

↳ $A^kBA^bA^{-k} = BA^{-k}A^bA^{-k} = BA^{b-2k}$

↳ $BA^kBA^b(BA^k)^{-1} = BA^kBA^bA^{-k}B^3 = B^2A^{-k}A^bA^{-k}B^3$

$= B^2A^{b-2k}B^3 = B^5A^{2k-b} = BA^{2k-b}$

↳ $B^2A^kBA^b(B^2A^k)^{-1} = B^2A^kBA^bA^{-k}B^2 = B^3A^{b-2k}B^2$

$= BA^{b-2k}$

↳ $B^3A^kBA^b(B^3A^k)^{-1} = B^3A^kBA^bA^{-k}B = A^{b-2k}B = BA^{2k-b}$

On trouve $[BA^b] = \{BA^{b-2k} \,/\, k=1-n,\dots,n-1\}$

Cependant, on comptera plusieurs fois les mêmes éléments. Il faut préciser les cas.

→ Remarquons que $b-2k$ a la même parité que b

↳ $[BA^b] = \{BA^j \,/\, j \bmod 2 = b \bmod 2$ et $j=0,\dots,2n-1\}$

↳ Dans le cas où $j \geq n$, on écrit $j=n+l$ avec $l=0,\dots,n-1$.

De nouveau $n+l$ a la même parité que b. Alors :

b et j pairs	b et j impairs
n et l pairs ou n et l impairs	n pair, l impair ou n impair, l pair
$[BA^b] = \{BA^j, B^3A^l$ avec	$[BA^b] = \{BA^j, B^3A^l$ avec
$j=0,2,\dots,n-1$ si n impair	$j=1,3,\dots,n-1$ si n pair
$j=0,2,\dots,n-2$ si n impair	$j=1,3,\dots,n-2$ si n impair
$l=0,2,\dots,n-2$ si n pair	$l=1,3,\dots,n-1$ si n pair
$l=1,3,\dots,n-2$ si n impair $\}$	$l=0,2,\dots,n-1$ si n impair $\}$

Antoine
DIERCKX
04

→ $[B^2A^c]$ avec $c=0,\dots,n-1$ fixé

↳ $A^k B^2 A^c A^{-k} = B^2 A^c$

↳ $BA^k B^2 A^c (BA^k)^{-1} = BA^k B^2 A^c A^{-k} B^3 = B^3 A^c B^3$

$= B^2 A^{-c} = B^2 A^{2n-c} = B^4 A^{n-c} = A^{n-c}$

↳ $B^2A^k B^2 A^c (B^2A^k)^{-1} = B^2A^k B^2 A^c A^{-k} B^2$

$= B^4 A^c B^2 = B^2 A^c$ (ouf !)

↳ $B^3A^k B^2 A^c (B^3A^k)^{-1} = B^3 A^k B^2 A^c A^{-k} B$

$= BA^cB = B^2A^{-c} = A^{n-c}$

On a alors $[B^2A^c] = \{B^2A^c, A^{n-c} \,/\, c=1,\dots,n-1\}$

et $[B^2] = \{B^2\}$

→ $[B^3A^d]$ avec $d=0,\dots,n-1$ fixé

↳ $A^k B^3 A^d A^{-k} = B^3 A^{d-2k}$

↳ $BA^k B^3 A^d A^{-k} B^3 = A^{d-2k} B^3 = B^3 A^{2k-d}$

↳ $B^2A^k B^3 A^d A^{-k} B^2 = B A^{d-2k} B^2 = B^3 A^{d-2k}$

↳ $B^3A^k B^3 A^d A^{-k} B = B^2 A^{d-2k} B = B^3 A^{2k-d}$

On a $[B^3A^d] = \{B^3A^{d-2k} \,/\, k=-n+1,\dots,n-1\}$

De nouveau, il faut séparer les cas :

d pair	d impair
$[B^3A^d] = \{B^3A^k, BA^\ell$ avec	$[B^3A^d] = \{B^3A^k, BA^\ell$ avec
$k=0,2,\dots,n-1$ si n impair	$k=1,3,\dots,n-1$ si n pair
$k=0,2,\dots,n-2$ si n pair	$k=1,3,\dots,n-2$ si n impair
$\ell=0,2,\dots,n-2$ si n pair	$\ell=1,3,\dots,n-2$ si n pair
$\ell=1,3,\dots,n-2$ si n impair $\}$	$\ell=1,3,\dots,n-1$ si n impair $\}$

Antoine DIERCKX 05

Nous sommes à présent prêt pour lister toutes les classes de conjugaison

→ $|[e]| = 1$

→ $|[A^a]| = 2$ pour chaque valeur de a ⇝ $2(n-1)$ éléments.

→ $|[BA^b / b \text{ impair}] \cup [BA^b / b \text{ pair}]| = 2n$

→ $|[B^2]| = 1$

↳ On trouve que le nombre total d'éléments de ces classes de conjugaison est $1 + 2(n-1) + 2n + 1 = 4n + 1 - 2 + 1 = 4n = |D_n|$

↳ Le nombre de classe de conjugaison est

$1 + (n-1) + 2 + 1 = n + 3$

c) Irreps de dimension 1 de D_n

→ Pour un irrep de dimension 1, on a :

$*$ $T(e) = T(A^{2n}) = T(A)^{2n} = T(B^4) = T(B)^4 = 1$

$**$ $T(A^n) = T(A)^n = T(B^2) = T(B)^2$

$***$ $T(AB) = T(A)T(B) = T(BA^{-1}) = T(B)T(A^{-1}) = T(B)T(A)^{-1}$

Par $***$, $T(A^{-1}) = T(A)^{-1} = T(A) \Leftrightarrow T(A)^2 = 1 \Leftrightarrow T(A) = \pm 1$

Par $*$, $T(A^{2n}) = T(A^n)^2 = 1 \Leftrightarrow T(A^n) = \pm 1$

Si n est pair, on répète le raisonnement. Ceci force $T(A^n) = +1$

Par $**$, $\begin{cases} T(B)^2 = 1 \Leftrightarrow T(B) = \pm 1 & \text{dans le cas où } T(A^n) = +1 \\ T(B)^2 = -1 \Leftrightarrow T(B) = \pm i & \text{dans le cas où } T(A^n) = -1 \end{cases}$

→ On définit alors 4 irreps de dimension 1 :

T_0 telle que $T_0(A) = T_0(B) = 1$

T_1 telle que $T_1(A) = 1$ et $T_1(B) = -1$

T_2 telle que $T_2(A) = -1$ et $T_2(B) = i$ si n impair, $T_2(B) = 1$ si n pair.

T_3 telle que $T_3(A) = -1$ et $T_3(B) = -i$ si n impair, $T_3(B) = -1$ si n pair

Antoine
DIERCKX
06

d) Irreps de dimension $\neq 1$ de D_n

→ Puisque nous avons $n+3$ classes de conjugaison, nous avons $n+3$ irreps. De plus, l'ordre du groupe est $|D_n| = 4n$. Par le théorème de Burnside, on a :

$$4n = \sum_{i=1}^{n+3} (d_i)^2 = 1+1+1+1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\tilde{d}_i)^2$$

avec $\tilde{d}_i > 1$.

→ La dimension minimale de ces autres irreps étant 2, supposons qu'elles soient toutes effectivement de $\tilde{d}_i = 2$. Alors

$$4n-4 = 4(n-1) \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{n-1} 2^2 = (n-1)\,2^2 = 4(n-1).$$

Ainsi, $\tilde{d}_i = 2 \quad \forall i = 1, .., n-1$.

e) Irreps de dimension 2 de D_n.

→ On a $n-1$ irreps de dimension 2

→ On connait déjà la représentation

$$\tilde{T}(A) = \begin{pmatrix} \xi_{2n} & 0 \\ 0 & \xi_{2n}^{-1} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{T}(B) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \xi_{2n} = e^{i\pi/n}$$

On va essayer de la généraliser tout en respectant les relations du groupe.

↳ On essaye $\tilde{T}_k(A) \equiv \begin{pmatrix} \xi_{2n}^{k} & 0 \\ 0 & \xi_{2n}^{-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik\pi/n} & 0 \\ 0 & e^{-ik\pi/n} \end{pmatrix}$ et $\tilde{T}_k(B) = \tilde{T}(B)$

Or, $\tilde{T}_k(A^n) \overset{!}{=} \tilde{T}_k(B^2) \Leftrightarrow e^{-ik\pi} = -1 \Leftrightarrow k$ est impair

→ $k \in \{1, .., n-1 \,/\, k$ est impair $\}$. On doit donc encore trouver des irreps.

↳ On essaye alors $T_\ell'(A) = \tilde{T}_\ell(A)$ et $T_\ell'(B) = T'(B) \equiv \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

Or, $T_\ell'(A^n) \overset{!}{=} T_\ell'(B^2) \Leftrightarrow e^{-ik\pi} = 1 \Leftrightarrow \ell$ est pair.

→ $\ell \in \{2, .., n-1 \,/\, \ell$ est pair $\}$.

→ On a ainsi obtenu $n-1$ irreps de dimension 2.

Antoine
DIERCKX
07

1) Table de charactères associée à D_n

→ Soit (T,V) une représentation du groupe G. Le caractère d'un élément $g\in G$ est défini comme $\chi_V(g) = \mathrm{tr}_V T(g)$

→ Nous allons donner 2 tables de caractères, dans le cas où n est pair, et celui où il est impair.

→ Cas de n pair:

	$[e]$	$[A]$	$[A^2]$	$[A^3]$	$\cdots$	$[A^{n-1}]$	$[B^2]$	$[BA]$	$[BA^2]$
T_0	1	1	1	1	$\cdots$	1	1	1	1
T_1	1	1	1	1	$\cdots$	1	1	-1	-1
T_2	1	-1	1	-1	$\cdots$	-1	1	-1	1
T_3	1	-1	1	-1	$\cdots$	-1	1	1	-1
$\tilde{T}_k$	2	$2\cos(k\pi/n)$	$\cdots$			$2\cos([n-1]k\pi/n)$	-2	0	0
T'_ℓ	2	$2\cos(\ell\pi/n)$	$\cdots$			$2\cos([n-1]\ell\pi/n)$	2	0	0

→ Cas de n impair:

	$[e]$	$[A]$	$[A^2]$	$[A^{n-1}]$	$[B^2]$	$[BA]$	$[BA^2]$
T_0	1	1	1	1	1	1	1
T_1	1	1	1	1	1	-1	-1
T_2	1	-1	1	1	-1	$-i$	i
T_3	1	-1	1	1	-1	i	$-i$
$\tilde{T}_k$	2	$2\cos(k\pi/n)$	$2\cos(2k\pi/n)$	$2\cos([n-1]k\pi/n)$	-2	0	0
T'_ℓ	2	$2\cos(\ell\pi/n)$	$2\cos(2\ell\pi/n)$	$2\cos([n-1]\ell\pi/n)$	2	0	0

Antoine
DIERCKX
08

PARTIE 2 :

① Graphes de McKay pour C_n et D_n

La représentation choisie est $\begin{pmatrix} \xi_n & 0 \\ 0 & \xi_n^{-1} \end{pmatrix}$ pour C_n et

$T_W(A) = \begin{pmatrix} \xi_{2n} & 0 \\ 0 & \xi_{2n}^{-1} \end{pmatrix}$, $T_W(B) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ pour D_n. On calculera ensuite

$$(\rho_W, W) \otimes (\rho_i, V_i) = \bigoplus_j (\rho_j, V_j)^{\oplus n_{ij}}$$

a) Graphe de McKay pour C_2 :

→ On a : $C_2 = \{e, a \,/\, a^2 = e\}$.

De plus, $T_W(a) = \begin{pmatrix} \xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$

$\rightarrow (T_W \otimes T_0)(a) = T_W = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = T_1^{\oplus 2}(a)$

$\rightarrow (T_W \otimes T_1)(a) = \begin{pmatrix} -1 \cdot -1 & 0 \\ 0 & -1 \cdot -1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T_0^{\oplus 2}(a)$

↳ Le graphe est donc 

b) Graphe de McKay pour C_3 :

→ On a $C_3 = \{e, a, a^2 \,/\, a^3 = e\}$

De plus, $T_W(a) = \begin{pmatrix} \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_3^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(2\pi i/3) & 0 \\ 0 & \exp(-2\pi i/3) \end{pmatrix}$

$\rightarrow (T_W \otimes T_k)(a) = \begin{pmatrix} \xi_3 \cdot \xi_3^k & 0 \\ 0 & \xi_3^{-1} \cdot \xi_3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_3^{k+1} & 0 \\ 0 & \xi_3^{k-1} \end{pmatrix}$

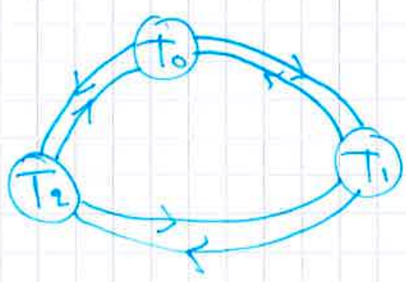
$= \begin{pmatrix} \xi_3^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi_3^{k-1} \end{pmatrix} = T_{k+1}(a) \oplus T_{k-1}(a)$ mod 3

↳ On a donc : $(T_W \otimes T_0) = T_1 \oplus T_2$

$(T_W \otimes T_1) = T_2 \oplus T_0$

$(T_W \otimes T_2) = T_0 \oplus T_1$

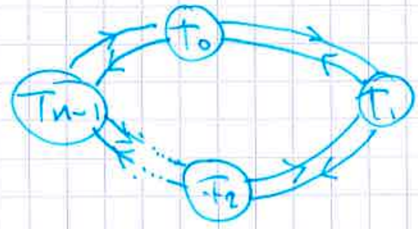
↳ Le graphe est donc



Anhie DIERCKX 09

① c) Graphe de Mc-Kay pour C_n :

→ En généralisant, on obtient, pour la représentation choisie T_w, le graphe suivant :



d) Graphe de McKay pour D_2 :

On rappelle que $T_w(A) = \begin{pmatrix} \xi_4 & 0 \\ 0 & \xi_4^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et $T_w(B) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

→ $(T_w \otimes T_0)(A) = T_w(A)$ et $(T_w \otimes T_0)(B) = T_w$

Ainsi, $T_w \otimes T_0 = T_w$

→ $(T_w \otimes T_1)(A) = T_w(A)$ et $(T_w \otimes T_1)(B) = -T_w(B)$

On cherche alors un isomorphisme qui laisse invariant $T_w(A)$ et qui change de signe $T_w(B)$. On propose alors un changement de base $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$S(T_w \otimes T_1)(B)S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

et $S(T_w \otimes T_1)(A)S^{-1} = (T_w \otimes T_1)(A)$.

Ainsi, $T_w \otimes T_1 = T_w$

→ $(T_w \otimes T_2)(A) = -T_w(A)$ et $(T_w \otimes T_2)(B) = T_w(B)$

De même, on pose le changement de base $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors :

$S(T_w \otimes T_2)(A)S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & +i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = T_w(A)$

et $S(T_w \otimes T_2)(B)S^{-1} = T_w(B)$.

Ainsi, $T_w \otimes T_2 = T_w$

Antoine
DIERCKX
10

→ $(T_w \otimes T_3)(A) = -T_w(A)$ et $(T_w \otimes T_3)(B) = -T_w(B)$

De même, on effectue le changement de base $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors :

$$S(T_w \otimes T_3)(A)S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$S(T_w \otimes T_3)(B)S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $T_w \otimes T_4 = T_w$

→ $$(T_w \otimes \tilde{T}_1)(A) = (T_w \otimes T_w)(A) = \begin{pmatrix} i\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & -i\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, -1).$$

$$(T_w \otimes \tilde{T}_1)(B) = \begin{pmatrix} 0 & i\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ i\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On procède en 2 étapes. Considérons un premier changement de base qui laisse $(T_w \otimes T_w)(A)$ diagonale et diagonalise par bloc $T_w^2(B)$. On pose $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Alors :

$$S(T_w^2)(A)S^{-1} = \mathrm{diag}(-1, -1, 1, 1) = -\mathbb{1}_2 \oplus \mathbb{1}_2 \equiv A_1 \oplus A_2$$

$$S(T_w^2)(B)S^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv B_1 \oplus B_2$$

L'étape suivante est de diagonaliser B_1 et B_2.

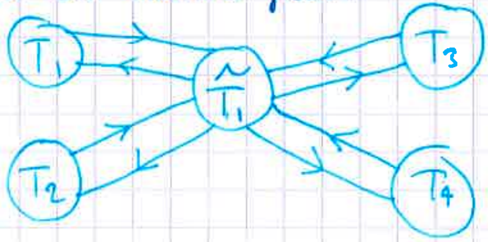
→ $\det(B_1 - \lambda \mathbb{1}_2) = \lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = \pm 1$. On a alors

$(T_w^2)(A) = \mathrm{diag}(-1, -1, 1, 1)$ et $(T_w^2)(B) = \mathrm{diag}(+1, -1, +1, -1)$.

On peut finalement décomposer $T_w \otimes T_w$:

$$T_w \otimes \tilde{T}_1 = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4$$

→ Le graphe est donné par :



e) graphe de Mc-Kay pour D_3 :

On rappelle que $T_W(A) = \begin{pmatrix} \zeta_6 & 0 \\ 0 & \zeta_6^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/3} \end{pmatrix}$

et $T_W(B) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow (T_W \otimes T_0)(A) = T_W(A)$, $(T_W \otimes T_0)(B) = T_W(B)$

Ainsi, $T_W \otimes T_0 = T_W$

$\rightarrow (T_W \otimes T_1)(A) = T_W(A)$ et $(T_W \otimes T_1)(B) = -T_W(B)$

Par le même isomorphisme que dans le cas D_2, on a que

$T_W \otimes T_1 = T_W$

$\rightarrow (T_W \otimes T_2)(A) = -T_W(A)$ et $(T_W \otimes T_2)(B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_6^3 \\ \zeta_6^3 & 0 \end{pmatrix}$

On peut également réécrire $(T_W \otimes T_2)(A) = \begin{pmatrix} \zeta_6^{-2} & 0 \\ 0 & \zeta_6^{2} \end{pmatrix}$

On pose alors le changement de base $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow S (T_W \otimes T_2)(A) S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_6^{-2} & 0 \\ 0 & \zeta_6^{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & +i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & +\zeta_6^{-2} \cdot i \\ \zeta_6^{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_6^2 & 0 \\ 0 & \zeta_6^{-2} \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow S (T_W \otimes T_2)(B) S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & +i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & +i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, $T_W \otimes T_2 = \tilde{T}_1$. De même, $T_W \otimes T_3 = \tilde{T}_2$

$\rightarrow (T_W \otimes \tilde{T}_1)(A) = \begin{pmatrix} \zeta_6 \begin{pmatrix} \zeta_6 & 0 \\ 0 & \zeta_6^{-1} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \zeta_6^{-1} \begin{pmatrix} \zeta_6 & 0 \\ 0 & \zeta_6^{-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\zeta_6^2, 1, 1, \zeta_6^2)$

et $(T_W \otimes \tilde{T}_1)(B) = \begin{pmatrix} 0 & & & -1 \\ & & -1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & 0 \end{pmatrix}$. On effectue le même changement de base que dans le cas D_2 :

on pose $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient :

$(T_W^2)(A) = \mathrm{diag}(\zeta_6^2, \zeta_6^{-2}, 1, 1) \equiv A_1 \oplus A_2$

et $(T_W^2)(B) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv B_1 \oplus B_2$

Antaine
DIEKCKX
12

↳ Pour les blocs A_1, B_1, on reconnait $A_1 = \tilde{T}_2(A)$. On effectue alors le changement de base $S_1 \equiv \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \zeta_6^2 & 0 \\ 0 & \zeta_6^{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_6^2 & 0 \\ 0 & \zeta_6^{-2} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

↳ A_2 étant proportionnelle à l'identité, elle est invariante sous changement de base. On diagonalise alors B_2 :

$\det(B_2 - \lambda \mathbb{1}_2) = \lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = \pm 1$.

On a : $(T_W^2)(A) = \begin{pmatrix} \zeta_6^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_6^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ainsi, $T_W \otimes \tilde{T}_1 = \tilde{T}_2 \oplus T_1 \oplus T_0$

$$\rightarrow (T_W \otimes \tilde{T}_2)(A) = \begin{pmatrix} \zeta_6 \begin{pmatrix} \zeta_6^2 & 0 \\ 0 & \zeta_6^{-2} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \zeta_6^{-1}\begin{pmatrix} \zeta_6^2 & 0 \\ 0 & \zeta_6^{-2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\left(\zeta_6^3, \zeta_6^{-1}, \zeta_6^{1}, \zeta_6^{-3}\right)$$

$$= \mathrm{diag}\left(-1, \zeta_6^{-1}, \zeta_6, -1\right)$$

et $(T_W \otimes \tilde{T}_1)(B) = \mathrm{adiag}(-1, 1, -1, 1)$

On effectue le changement de base $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Alors

$(T_W \otimes \tilde{T}_2)(A) = \mathrm{diag}(-1, -1, \zeta_6, \zeta_6^{-1}) \equiv A_1 \oplus A_2$ et

$$(T_W \otimes \tilde{T}_2)(B) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv B_1 \oplus B_2$$

↳ On diagonalise B_1 :

$\det(B_1 - \lambda \mathbb{1}_2) = \lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i$

↳ On change de base pour A_2 et B_2 selon $S_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. On a :

$A_2 = \begin{pmatrix} \zeta_6 & 0 \\ 0 & \zeta_6^{-1} \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

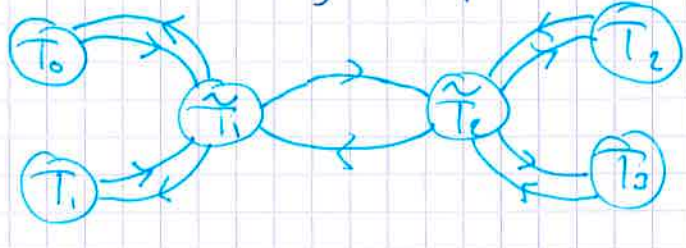
Antoine DIERCKX
13

On obtient finalement :

$(T_W \otimes \tilde{T}_2)(A) = \mathrm{diag}(-1, -1, \zeta_6, \zeta_6^{-1})$ et

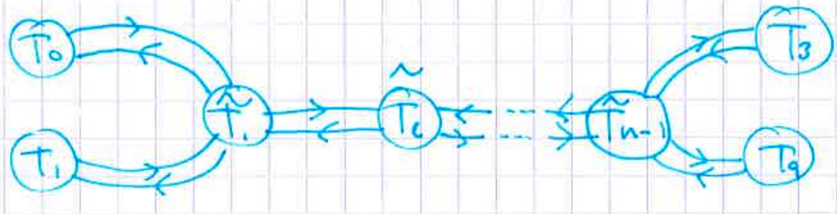
$(T_W \otimes \tilde{T}_2)(B) = \begin{pmatrix} i & 0 & & 0 \\ 0 & -i & & \\ & & 0 & i \\ 0 & & i & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $(T_W \otimes \tilde{T}_2) = \tilde{T}_1 \oplus T_2 \oplus T_3$

→ Le graphe de Mc-Kay correspondant est donné par



2) Graphe de Mc-Kay pour D_n :

En généralisant, on obtient le graphe suivant :



Antoine DIERCKX

14

② Graphes de McKay des groupes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{O}$:

La représentation choisie est $(\rho_W, W) = (\rho_{V_1}, V_1)$.

On se rappelle que le caractère d'un élément $g \in G$ est défini comme

$$\chi_V(g) = tr_V T(g)$$

et que l'on a les propriétés suivantes:

$$\chi_V(e) = \dim V$$

$$\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1} \cdot \chi_{V_2} \text{ et } \chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$$

a) Graphe de McKay du groupe $\mathcal{T}$:

La table des charactères nous est donnée:

Rep	e	B	C
V_0	1	1	1
V_1	2	0	1
V_2	3	-1	0
V_3	2	0	ζ_3
$V_3^\vee$	2	0	ζ_3^2
V_4	1	1	ζ_3
$V_4^\vee$	1	1	ζ_3^2

Avec $\zeta_3 = e^{i2\pi/3} = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$
$= -1/2 + i\sqrt{3}/2$

$\zeta_3^2 = e^{i4\pi/3} = \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)$
$= -1/2 - i\sqrt{3}/2$

On notera $\chi_{(\rho_i \otimes \rho_j,\, V_i \otimes V_j)}(g) \equiv \chi_{i \times j}(g)$

$\chi_{(\rho_i \oplus \rho_j,\, V_i \oplus V_j)}(g) \equiv \chi_{i+j}(g)$

$\rightarrow \chi_{1\times 0}(e) = 2 = \chi_1(e)$

$\chi_{1\times 0}(B) = 0 = \chi_1(B) \leadsto T_W \otimes T_0 = T_1$

$\chi_{1\times 0}(C) = 1 = \chi_1(C)$

$\rightarrow \chi_{1\times 1}(e) = 4 = \chi_{2+0}(e)$

$\chi_{1\times 1}(B) = 0 = \chi_{2+0}(B) \leadsto T_W \otimes T_1 = T_2 \oplus T_0$

$\chi_{1\times 1}(C) = 1 = \chi_{2+0}(C)$

$\rightarrow \chi_{1\times 2}(e) = 6 = \chi_{1+3+3^\vee}(e)$

$\chi_{1\times 2}(B) = 0 = \chi_{1+3+3^\vee}(B) \leadsto T_W \otimes T_2 = T_1 \oplus T_3 \oplus T_3^\vee$

$\chi_{1\times 2}(C) = 0 = \chi_{1+3+3^\vee}(C)$

Antoine Dierckx
15

→ $\chi_{1\times 3}(e) = 4 = \chi_{2+4}(e)$

$\chi_{1\times 3}(B) = 0 = \chi_{2+4}(B) \rightsquigarrow T_W \otimes T_3 = T_2 \oplus T_4$

$\chi_{1\times 3}(C) = \xi_3 = \chi_{2+4}(C)$

→ $\chi_{1\times 3^\vee}(e) = 4 = \chi_{2+4^\vee}(e)$

$\chi_{1\times 3^\vee}(B) = 0 = \chi_{2+4^\vee}(B) \rightsquigarrow T_W \otimes T_3^\vee = T_2 \oplus T_4^\vee$

$\chi_{1\times 3^\vee}(C) = \xi_3^2 = \chi_{2+4^\vee}(C)$

→ $\chi_{1\times 4}(e) = 2 = \chi_3(e)$

$\chi_{1\times 4}(B) = 0 = \chi_3(B) \rightsquigarrow T_W \otimes T_4 = T_3$

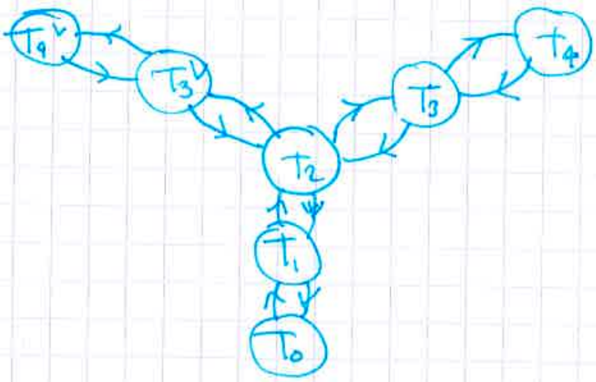
$\chi_{1\times 4}(C) = \xi_3 = \chi_3(C)$

→ $\chi_{1\times 4^\vee}(e) = 2 = \chi_3(e)$

$\chi_{1\times 4^\vee}(B) = 0 = \chi_3(B) \rightsquigarrow T_W \otimes T_4^\vee = T_3$

$\chi_{1\times 4^\vee}(C) = \xi_3^2 = \chi_3(C)$

Ainsi, le graphe est le suivant :



16 Antoine
DIERCKX

b) Graphe de McKay du groupe $\mathcal{O}$

→ La table des charactère nous est donnée :

Rep	e	B	C	D
V_0	1	1	1	1
V_1	2	0	1	$-\sqrt{2}$
V_2	3	-1	0	1
V_3	4	0	-1	0
V_4	3	-1	0	-1
V_5	2	0	1	$\sqrt{2}$
V_6	1	1	1	-1
V_7	2	2	-1	0

→ $\chi_{1\times 0}(e) = 2 = \chi_1(e)$

$\chi_{1\times 0}(B) = -2 = \chi_1(B)$

$\chi_{1\times 0}(C) = 1 = \chi_1(C)$ $\rightsquigarrow T_W \otimes T_0 = T_W$

$\chi_{1\times 0}(D) = -\sqrt{2} = \chi_1(D)$

→ $\chi_{1\times 1}(e) = 4 = \chi_{0+2}(e)$

$\chi_{1\times 1}(B) = 0 = \chi_{0+2}(B)$

$\chi_{1\times 1}(C) = 1 = \chi_{0+2}(C)$ $\rightsquigarrow T_W \otimes T_1 = T_0 \oplus T_2$

$\chi_{1\times 1}(D) = 2 = \chi_{0+2}(D)$

→ $\chi_{1\times 2}(e) = 6 = \chi_{1+3}(e)$

$\chi_{1\times 2}(B) = 0 = \chi_{1+3}(B)$

$\chi_{1\times 2}(C) = 0 = \chi_{1+3}(C)$ $\rightsquigarrow T_W \otimes T_2 = T_1 \oplus T_3$

$\chi_{1\times 2}(D) = -\sqrt{2} = \chi_{1+3}(D)$

→ $\chi_{1\times 3}(e) = 8 = \chi_{2+4+7}(e)$

$\chi_{1\times 3}(B) = 0 = \chi_{2+4+7}(B)$

$\chi_{1\times 3}(C) = -1 = \chi_{2+4+7}(C)$ $\rightsquigarrow T_W \otimes T_3 = T_2 \oplus T_4 \oplus T_7$

$\chi_{1\times 3}(D) = 0 = \chi_{2+4+7}(D)$

Antoine Diercky
17

$\rightarrow x_{1\times 4}(e) = 6 = x_{3+5}(e)$

$x_{1\times 4}(B) = 0 = x_{3+5}(B)$

$x_{1\times 4}(C) = 0 = x_{3+5}(C)$ $\rightsquigarrow T_W \otimes T_4 = T_3 \oplus T_5$

$x_{1\times 4}(D) = \sqrt{2} = x_{3+5}(D)$

$\rightarrow x_{1\times 5}(e) = 4 = x_{4+6}(e)$

$x_{1\times 5}(B) = 0 = x_{4+6}(B)$

$x_{1\times 5}(C) = 1 = x_{4+6}(C)$ $\rightsquigarrow T_W \otimes T_5 = T_4 \oplus T_6$

$x_{1\times 5}(D) = -2 = x_{4+6}(D)$

$\rightarrow x_{1\times 6}(e) = 2 = x_5(e)$

$x_{1\times 6}(B) = 0 = x_5(B)$

$x_{1\times 6}(C) = 1 = x_5(C)$ $\rightsquigarrow T_W \otimes T_6 = T_5$

$x_{1\times 6}(D) = \sqrt{2} = x_5(D)$

$\rightarrow x_{1\times 7}(e) = 4 = x_3(e)$

$x_{1\times 7}(B) = 0 = x_3(B)$

$x_{1\times 7}(C) = -1 = x_3(C)$ $\rightsquigarrow T_W \otimes T_7 = T_3$

$x_{1\times 7}(D) = 0 = x_3(D)$

Ainsi, le graphe est le suivant :