Antoine DIERCKX
1

Travail personel - les algèbres de Lie

Partie 1 : $so(2\ell+1)$

ⓐ Construire une base $\{h_i\}_{i=1}^r$ de la sous-algebre de Cartan. En déduire le rang de l'algèbre.

→ On se rappelle qu'une sous-algèbre de Cartan est la sous-algèbre abélienne maximale de L. Soit $\{h_i\}, i=1,..,r$ une base de H. Alors $h_i = h_i^+$ et $[h_i, h_j]=0$

→ Une base de $so(n)$ est donnée par $\{M_{pq} \,/\, p<q$ et $q=1,..,n\}$ avec $n = 2\ell+1$. De plus, :

$$[M_{pq}, M_{rs}] = \delta_{qr} M_{ps} - \delta_{qs} M_{pr} - \delta_{pr} M_{qs} + \delta_{ps} M_{qr}$$
$$\overset{!}{=} 0 \text{ pour qu'on ait } [h_i, h_j] = 0$$

Ceci impose $p \neq r$, $p \neq s$ et $q \neq r$, $q \neq s$.

↳ On peut alors définir la base suivante :

$\{h_1, .., h_r\} \equiv \{M_{12}, M_{34}, M_{56}, .., M_{2\ell-1,2\ell}\}$

Cependant, afin d'assurer la condition $h_i = h_i^+$, on redéfinit notre base selon $\{h_1, .., h_r\} \equiv \{-iM_{12}, -iM_{34}, ..., -iM_{2\ell-1,2\ell}\}$

Ainsi, $(-iM_{k-1,k})^+ = i.(-M_{k-1,k}) = -iM_{k-1,k}$ avec k pair.

→ De plus, ℓ élément dans la base $\{h_j\}$. Ainsi, le rang de la sous algèbre de Cartan est $r = \ell$.

Antoine DIERCKX

2

$[M_{12}, M_{34}] = \delta_{23} M_{14} - \delta_{24} M_{13} - \delta_{13} M_{24} + \delta_{14} M_{23}$

ⓑ Soient $e_j \equiv M_{2j,2\ell+1} - i M_{2j-1,2\ell+1}$ avec $j = 1, \dots, \ell$. Mq $[h_k, e_j] = \delta_{kj} e_j$

$$[h_k, e_j] = -i [M_{2k-1,2k}, M_{2j,2\ell+1}] + i^2 [M_{2k-1,2k}, M_{2j-1,2\ell+1}]$$
$$= -i \big(\delta_{2k,2j} M_{2k-1,2\ell+1} - \cancel{\delta_{2k,2\ell+1}} M_{2k-1,2j}$$
$$- \cancel{\delta_{2k-1,2j}} M_{2k,2\ell+1} - \cancel{\delta_{2k-1,2\ell+1}} M_{2k,2j} \big) \quad \text{car } 2k < 2\ell+1$$
$$- \big(\cancel{\delta_{2k,2j-1}} M_{2k-1,2\ell+1} - \cancel{\delta_{2k,2\ell+1}} M_{2k-1,2j-1} \quad \text{car } 2k \neq 2j-1$$
$$- \delta_{2k-1,2j-1} M_{2k,2\ell+1} + \cancel{\delta_{2k-1,2\ell+1}} M_{2k,2j-1} \big)$$
$$= \delta_{kj} (-i M_{2k-1,2\ell+1} + M_{2k,2\ell+1})$$
$$= \delta_{kj} e_j$$

ⓒ Construction des racines

→ Les h_i sont hermitiens et donc diagonalisables de valeurs propres réelles. Soit une irrep Λ, et soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ un des ensembles de vap (valeurs propres), de vep (vecteur propre) associé $f_{\mu,\lambda}$, λ étant un indice de dégénérescence. On a $h_i(f_{\mu,\lambda}) = \mu_i f_{\mu,\lambda}$.

→ Un poids de la représentation Λ est $\mu \in H^*$ tel que il existe au moins un vecteur non-nul de la représentation de Λ pour lequel on a

$$h(f_{\mu,\lambda}) = \mu(h) f_{\mu,\lambda}$$

→ On appelle racine un poids non nul de la représentation adjointe.

↳ Les éléments de H sont de poids nuls : $ad_h(h_i) = [h, h_i] = 0 \quad \forall h \in H$

↳ Le poids zéro est dégénéré r fois

↳ Les racines ne sont pas dégénérées

→ L'algèbre de Lie admet une décomposition triangulaire : $L = N^- \oplus H \oplus N^+$ où N^-, N^+ sont les sous algèbres engendrées par vecteurs e_α associés aux racines négatives (resp. positives).

→ Ainsi, puisque l'algèbre $so(2\ell+1)$ est de dimension $\frac{1}{2}(2\ell+1)(2\ell) = (2\ell+1)\ell$ il y a $\ell(2\ell+1)$ vep associés à des poids.
Or, le poids nul est dégénéré ℓ fois, et les racines 1 fois. On doit trouver $\ell(2\ell+1) - \ell = 2\ell^2$ racines.

Antoine DIERCKX

3

→ Soit e_α le vep associé à la racine α : $ad_h(e_\alpha) = [h, e_\alpha] = \alpha(h)\, e_\alpha$

On a déjà l racines données : $ad_{h_k}(e_j) = [h_k, e_j] = \delta_{kj}\, e_j$

Ainsi, $\alpha_j(h_k) = \delta_{kj}$

→ Ensuite, pour chaque racine α de vep e_α, $-\alpha$ est également une racine, de vep $e_{-\alpha}$. Ceci nous fournit l racines supplémentaires. Il reste à trouver $2l^2 - 2l = 2l(l-1)$ racines.

→ Pour construire le reste des racines, on considère des combinaisons de celles déjà obtenues. En effet, soit e_α, e_β deux vep associés aux racines α et β. Alors :

$$\begin{aligned} ad_h([e_\alpha, e_\beta]) &= [h, [e_\alpha, e_\beta]] \\ &= -[e_\alpha, [e_\beta, h]] - [e_\beta, [h, e_\alpha]] \\ &= +\beta [e_\alpha, e_\beta] - \alpha [e_\beta, e_\alpha] \\ &= (\alpha+\beta)[e_\alpha, e_\beta] \end{aligned}$$

Ainsi, $[e_\alpha, e_\beta]$ est un vep associé à la racine $(\alpha+\beta)$, pour autant que $[e_\alpha, e_\beta] \neq 0$ et $\alpha+\beta \neq 0$.

On regarde donc $[e_\alpha, e_\beta]$ avec $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq -\beta$. Cela fournit $\frac{1}{2}l(l-1)$* vep associés à $\frac{1}{2}l(l-1)$ racines de la forme $(\alpha_j + \alpha_k)$

* car $j<k$

En considérant les vep de la forme $[e_j, e_{-k}]$, on récupère $\frac{1}{2}l(l-1)$ racines supplémentaires de la forme $(\alpha_j - \alpha_k)$

→ Enfin, les $l(l-1)$ racines dernièrement trouvée peuvent être doublées en considérant leur opposé :

$$(\alpha_j + \alpha_k) \mapsto (-\alpha_j - \alpha_k) \text{ et } (\alpha_j - \alpha_k) \mapsto (-\alpha_j + \alpha_k)$$

↳ Les $2l^2$ racines sont donc :

$$\{(\delta_{jL}), (-\delta_{jL}), (\delta_{jM} + \delta_{jL}), (\delta_{jM} - \delta_{jL}), (-\delta_{jM} - \delta_{jL}), (-\delta_{jM} + \delta_{jL}) \text{ telle que } j = 1, \dots, l;\ L = 1, \dots, l,\ M = 1, \dots, l \text{ avec } M < L\}$$

⚠ Abus de notation : $\{(\delta_{jL})\} = \{(\delta_{1L}, \dots, \delta_{lL}) \mid L = 1, \dots, l\}$

Aubin DIERCKX

4

d) Racines positives puis racines simples.

→ Une racine est positive si sa 1^e composante non nulle est positive.

Une racine est simple si elle est positive, et qu'elle ne peut s'écrire comme la somme de 2 racines positives.

→ Les racines $\{\alpha_j\} = \{(\delta_{1j}, \ldots, \delta_{\ell j})\}$ sont positives puisqu'elles sont composées d'un 1 et de $\ell-1$ 0.

→ Les racines $\{-\alpha_j\} = \{(-\delta_{1j}, \ldots, \delta_{\ell j})\}$ sont donc négatives.

→ Les racines $\{\alpha_j + \alpha_k\} = \{(\delta_{1j} + \delta_{1k}, \ldots, \delta_{\ell j} + \delta_{\ell k})\}$ avec $j < k = 1, \ldots, \ell$ sont également positive puisque toutes leurs composantes sont non-négatives.

→ Les racines $\{-\alpha_j - \alpha_k\} = \{(-\delta_{1j} - \delta_{1k}, \ldots, -\delta_{\ell j} - \delta_{\ell k})\}$ sont négatives.

→ Les racines $\{\alpha_j - \alpha_k\} = \{(\delta_{1j} - \delta_{1k}, \ldots, \delta_{\ell j} - \delta_{\ell k})\}$ possèdent une composante négative et une autre positive. Cependant, puisque $j < k$, la composante positive "arrive en 1^e". Elles sont donc positives.

→ Les racines $\{-\alpha_j + \alpha_k\}$ sont négatives.

↳ Ainsi, il y a $|\{\alpha_j\}| + |\{\alpha_j + \alpha_k\}| + |\{\alpha_j - \alpha_k\}| = \ell + \frac{1}{2}\ell(\ell-1) + \frac{1}{2}\ell(\ell-1)$
$= \ell^2$ racines positives.

→ Parmi elles, celles de la forme $\{\alpha_j + \alpha_k\}$ ne sont pas simple.

Celles de la formes $\{\alpha_j \,/\, j < n\}$ ne le sont pas non plus car on peut écrire $\alpha_j = (\alpha_j - \alpha_k) + \alpha_k$. Ainsi, les $\ell-1$ racines $\{\alpha_j \,/\, j < n\}$ ne sont pas simple.

→ Les racines de la forme $\{\alpha_j - \alpha_k\}$ doivent se traiter par cas :

↳ pour $k = j+1$, $\alpha_j - \alpha_{j+1}$ est simple

↳ Pour $k > j+1$, $\alpha_{jk} = (\alpha_j - \alpha_{k-1}) + (\alpha_{k-1} - \alpha_j)$ n'est pas simple.

On a donc $1 + \ell - 1 = \ell$ racines simples :

$\{\alpha_\ell,\ \alpha_j - \alpha_{j+1} \,/\, j = 1, \ldots, \ell-1\}$

Antoine DIERCK

5

f) Produit scalaire entre racines simples

→ $\alpha_\ell \cdot (\alpha_j - \alpha_{j+1}) = \delta_{\ell j} - \delta_{\ell, j+1} = -\delta_{\ell, j+1}$

Donc $\alpha_\ell \cdot (\alpha_{\ell-1} - \alpha_\ell) = 1$, les autres cas sont nuls.

→ $\alpha_\ell \cdot \alpha_\ell = 1$

→ $(\alpha_j - \alpha_{j+1})\cdot(\alpha_k - \alpha_{k+1})$ avec $j, k = 1, \dots, \ell - 1$

$$= \left[(\delta_{1j}, \dots, \delta_{\ell j}) - (\delta_{1,j+1}, \dots, \delta_{\ell, j+1})\right]\cdot\left[(\delta_{1k}, \dots, \delta_{\ell k}) - (\delta_{1,k+1}, \dots, \delta_{\ell, k+1})\right]$$

$$= (\delta_{1j} - \delta_{1,j+1})\cdot(\delta_{1k} - \delta_{1,k+1}) + \dots + (\delta_{\ell j} - \delta_{\ell, j+1})\cdot(\delta_{\ell k} - \delta_{\ell, k+1})$$

$$= \delta_{1j}\delta_{1k} - \delta_{1j}\cancel{\delta_{1,k+1}} - \cancel{\delta_{1,j+1}}\delta_{1,k} + \cancel{\delta_{1,j+1}}\cancel{\delta_{1,k+1}} + (\delta_{2j} - \delta_{2,j+1})(\delta_{2k} - \delta_{2,k+1})$$
$$+ \dots + (\delta_{\ell-1,j} - \delta_{\ell-1,j+1})(\delta_{\ell-1,k} - \delta_{\ell-1,k+1}) + \delta_{\ell j}\delta_{\ell,k} - \delta_{\ell j}\cancel{\delta_{\ell,k+1}} - \cancel{\delta_{\ell,j+1}}\delta_{\ell k} + \delta_{\ell,j+1}\delta_{\ell,k+1}$$

$$= \delta_{1j}\delta_{1k} + (\delta_{2j} - \delta_{2,j+1})(\delta_{2k} - \delta_{2,k+1}) + \dots + (\delta_{\ell-1,j} - \delta_{\ell-1,j+1})(\delta_{\ell-1,k} - \delta_{\ell-1,k+1}) + \delta_{\ell j}\delta_{\ell k}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k,\ j \neq k+1 \text{ et } k = j+1 \\ -1 & \text{si } j = k+1 \text{ ou } k = j+1 \\ 2 & \text{si } k = j \end{cases}$$

g) Matrice de Cartan de $so(2\ell+1)$ et diagramme de Dynkin.

→ On définit la matrice de Cartan selon

$A = (A_{ij})$, $A_{ij} = 2\,\dfrac{\beta_i \cdot \beta_j}{\beta_j^2}$ où les β_j sont des racines simples.

Cette matrice encode les angles et longueurs entre les racines simples.

→ On choisit de renommer nos racines simples :

$\beta_1 \equiv \alpha_\ell$ Alors $\beta_1^2 = 1$

$\beta_2 \equiv \alpha_1 - \alpha_2$ $\beta_2^2 = 2$

$\vdots$

$\beta_m \equiv \alpha_{m-1} - \alpha_m$ $\beta_m = 2$

$\vdots$

$\beta_\ell \equiv \alpha_{\ell-1} - \alpha_\ell$ $\beta_\ell = 2$

↳ La matrice est de la forme :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & \ddots & 2 & -1 \\ -2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Antoine DIERCKX
6

→ Pour construire notre diagramme de Dynkin, on associe à chaque racine simple un noeud. Le nombre d'arêtes entre les noeuds i et j est $\max\{|A_{ij}|, |A_{ji}|\}$.

On met une flèche vers la racine la plus courte (si $|A_{ij}| \neq |A_{ji}|$)

↳ On obtient alors :

Antoin DIERCKX
7

Partie 2 : $so(2\ell)$

a) Construire une base $\{h_i\}_{i=1}^r$ de la sous algèbre de Cartan.
En déduire le rang de l'algèbre

→ Comme pour la partie 1, une base de $so(n)$ est donnée par $\{M_{pq} \,/\, p<q=1,\dots,n\}$ avec $n=2\ell$. Pour obtenir une base de H, $\{h_i\}$, il faut que $[h_i,h_j]=0$. Or, $[M_{pq},M_{rs}]=0$ pour $p=r, p\neq s$ et $q\neq r, q\neq s$. On construit alors la base $\{h_i\}_{i=1}^r \equiv \{-iM_{12}, -iM_{34}, \dots, -iM_{2\ell-1,2\ell}\}$

→ Le rang de l'algèbre est $r=\ell$.

→ Les h_j de $so(2\ell)$ sont les h_j de $so(2\ell+1)$ amputés de la dernière ligne et la dernière colonne de 0.

b) Construction des racines

→ L'algèbre de $so(2\ell)$ est de dimension $\frac{1}{2}2\ell(2\ell-1)=\ell(2\ell-1)$
Or, le poids nul est $r=\ell$ fois dégénéré et les racines ne sont pas dégénérées. On cherche donc $\ell(2\ell-1)-\ell = 2\ell(\ell-1)$ racines.

→ On ne peut pas réutiliser les racines $\{e_j\}$ car
$e_j \equiv M_{2j,2\ell+1} - iM_{2j-1,2\ell+1}$ et $M_{2j,2\ell+1}$ et $M_{2j-1,2\ell+1}$ ont été amputé.

→ Les racines de la forme $\{[e_j,e_k]\}$ sont par contre acceptées :

$$[e_j,e_k]=[M_{2j,2\ell+1},M_{2k,2\ell+1}]-i[M_{2j,2\ell+1},M_{2k,2\ell+1}]$$
$$-i[M_{2j-1,2\ell+1},M_{2k,2\ell+1}]-[M_{2j-1,2\ell+1},M_{2k-1,2\ell+1}]$$

$[M_{12},M_{34}] \overset{?}{=} \delta_{23}-\delta_{24}+\delta_{14}-\delta_{13}$

$$= \cancel{\delta_{2\ell+1,2k}M} - \cancel{\delta_{2\ell+1,2\ell+1}M} + \cancel{\delta_{2j,2\ell+1}M} - \delta_{2j,2k}M$$
$$-i(\cancel{\delta_{2\ell+1,2k}M} - \cancel{\delta_{2\ell+1,2\ell+1}M} + \cancel{\delta_{2j,2\ell+1}M} - \delta_{2j,2k}M)$$
$$-i(\cancel{\delta_{2\ell+1,2k}M} - \cancel{\delta_{2\ell+1,2\ell+1}M} + \cancel{\delta_{2j-1,2\ell+1}M} - \delta_{2j-1,2k}M)$$
$$-(\cancel{\delta_{2\ell+1,2k-1}M} - \cancel{\delta_{2\ell+1,2\ell+1}M} + \cancel{\delta_{2j-1,2\ell+1}M} - \delta_{2j-1,2k-1}M)$$
$$= -M_{2j,2k} - iM_{2j,2k-1} + iM_{2j-1,2k} + M_{2j-1,2k-1}$$

↳ On obtient $\frac{1}{2}\ell(\ell-1)$ racines $\alpha_j+\alpha_k$ avec $j<k=1,\dots,\ell$ associées aux vep $[e_j,e_k]$

Arthur DIERCKX
8

→ Similairement, on obtient $\frac{1}{2}\ell(\ell-1)$ racines $\alpha_j - \alpha_k$ avec $j<k=1,..$ associées aux vep $[e_j, e_{-k}]$, $\frac{1}{2}\ell(\ell-1)$ racines $-\alpha_j-\alpha_k$ associées aux vep $[e_{-j}, e_{-k}]$ et $\frac{1}{2}\ell(\ell-1)$ racines $-\alpha_j+\alpha_k$ avec $j<k=1,..,\ell$ associées aux vep $[e_{-j}, e_{+k}]$

↳ On a bien $2\ell(\ell-1)$ racines.

ⓒ Racines positives puis racines simples

→ Comme précédemment, les racines positives sont $\{\alpha_j+\alpha_k\}$ et $\{\alpha_j-\alpha_k\}$

→ Les racines $\{\alpha_j+\alpha_k\}$ peuvent s'écrire

$$\alpha_j+\alpha_k = (\alpha_j+\alpha_m)+(\alpha_k-\alpha_m) \quad \text{si } j<m \text{ et } k<m$$

Ainsi, seule $\alpha_{\ell-1}+\alpha_\ell$ est une racine simple

→ Les racines $\{\alpha_j-\alpha_k\}$ peuvent s'écrire

$$\alpha_j-\alpha_k = (\alpha_j-\alpha_m)+(\alpha_m-\alpha_k) \quad \text{si } j<m<k$$

Ainsi, seules les $\{\alpha_j - \alpha_{j+1} \,/\, j=1,..,\ell-1\}$ sont simple

↳ On retrouve les ℓ racines simples.

ⓔ Produit scalaires entre racines simples

→ Comme dans la partie précédente, on a :

$$(\alpha_j-\alpha_{j+1})\cdot(\alpha_k-\alpha_{k+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j\neq k,\ j\neq k+1 \text{ et } k=j+1 \\ -1 & \text{si } j=k+1 \text{ ou } k=j+1 \\ 2 & \text{si } j=k \end{cases}$$

$$\to (\alpha_{\ell-1}+\alpha_\ell)\cdot(\alpha_j-\alpha_{j+1}) = \delta_{\ell-1,j}-\delta_{\ell-1,j+1}+\delta_{\ell j}-\delta_{\ell,j+1}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } j\neq \ell-2 \\ -1 & \text{si } j=\ell-2 \end{cases}$$

Antoine
DIERCK

2) Matrice de Cartan de $so(2l)$ et diagramme de Dynkin.

→ On renomme nos racines :

$$\beta_1 = \alpha_{l-1} + \alpha_l$$

$$\beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2 \qquad \text{avec } \beta_j^2 = 2 \,,\; j=1,\dots,l.$$

$$\vdots$$

$$\beta_m = \alpha_{m-1} - \alpha_m$$

$$\vdots$$

$$\beta_l = \alpha_{l-1} - \alpha_l$$

La matrice de Cartan est donnée par : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & & & \vdots \\ \vdots & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ -1 & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

→ Le diagramme de Dynkin est donné par :