MATH-F410 – REP. DES GROUPES & APP. A LA PHYS.

Séances d'exercices 2023-2024

Séance 9 : Algèbres de Lie (III) et représentations de $su(3)$

1. Décomposer les représentations $\mathbf{3}$, $\bar{\mathbf{3}}$ et $\mathbf{8}$ de $su(3)$ en représentations irréductibles du $su(2)$ associé à la racine de plus haut poids.

2. Décomposer les produits tensoriels des représentations suivantes en représentations irréductibles de $su(3)$ à l'aide des méthodes tensorielles :

   (a) $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$, c'est-à-dire $(1,0) \otimes (0,1)$

   (b) $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$, c'est-à-dire $(1,0) \otimes (1,0)$

   (c) $\mathbf{6} \otimes \mathbf{3}$, c'est-à-dire $(2,0) \otimes (1,0)$

   (d) $\mathbf{8} \otimes \mathbf{10}$, c'est-à-dire $(1,1) \otimes (3,0)$

   On rappelle que la dimension de la représentation (m,n) est $\frac{(m+1)(n+1)(m+n+2)}{2}$.

3. Le vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf

$$v^{\overbrace{1\cdots 1}^{m_1 fois}\overbrace{2\cdots 2}^{m_2 fois}\overbrace{3\cdots 3}^{m_3 fois}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{n_1 fois}\underbrace{2\cdots 2}_{n_2 fois}\underbrace{3\cdots 3}_{n_3 fois}}$$

   est un vecteur de la représentation (m,n) de $su(3)$ avec $m = m_1 + m_2 + m_3$ et $n = n_1 + n_2 + n_3$.

   (a) Calculer le poids $\nu = (\nu^1, \nu^2)$ de ce vecteur en fonction de m_i et n_i, en utilisant la relation vue au cours qui décrit l'action des générateurs de $su(3)$ sur les composantes d'un tenseur $\binom{m}{n}$:

$$\delta_u v^{i_1\cdots i_m}_{\ \ j_1\cdots j_n} = \sum_{p=1}^{m} u^{i_p}_{\ \ k_p} v^{i_1\cdots k_p \cdots i_m}_{\ \ j_1\cdots j_n} - \sum_{q=1}^{n} v^{i_1\cdots i_m}_{\ \ j_1\cdots \ell_q \cdots j_n} u^{\ell_q}_{\ \ j_q} .$$

   On rappelle aussi que

$$h_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (b) Réécrire le résultat en fonction des poids fondamentaux

$$\mu^1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}), \qquad \mu^2 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}).$$

(c) Utilisant les relations

$$\alpha_1 = 2\mu^1 - \mu^2\,, \qquad \alpha_2 = 2\mu^2 - \mu^1\,,$$

exprimer le poids ν en terme du plus haut poids

$$\mu_{p.h.} = m\,\mu^1 + n\,\mu^2$$

et des racines positives.

4. À l'aide de la formule de poids dérivée à l'exercice précédent, tracer le diagramme des poids de la $(2,1)$ de $su(3)$ en sachant que les poids fondamentaux de $su(3)$ sont

$$\mu^1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})\,, \qquad \mu^2 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$$

et que ses racines simples sont

$$\alpha_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\,, \qquad \alpha_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})\,.$$

Vérifier que le diagramme des poids est invariant sous le groupe de Weyl. Vérifier que le poids le plus haut est dominant. Vérifier la dimension de la représentation.

5. Tracer le diagramme des poids de la representation $(4,1) = \mathbf{35}$ de $su(3)$.