MATH-F410 – REP. DES GROUPES & APP. A LA PHYS.

Séances d'exercices 2023-2024

Séance 8 : Algèbres de Lie (II)

1. On considère démontré qu'il existe une algèbre de Lie de rang 2, G_2, dont les racines simples α_1 et α_2 satisfont à

$$\alpha_1^2 = 1\,, \quad \alpha_2^2 = 3\,, \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -\frac{3}{2}\,.$$

   (a) Calculer la matrice de Cartan et l'angle entre les racines simples.

   (b) Tracer le diagramme de Dynkin.

   (c) Construire toutes les racines de G_2.

   (d) Donner la dimension de G_2.

2. Démontrer les relations de Serre

$$(\mathrm{ad}_{e_i})^{1-A_{ij}} e_j = 0 = (\mathrm{ad}_{f_i})^{1-A_{ij}} f_j\,,$$

   où les A_{ij} sont les composantes de la matrice de Cartan.

3. On considère l'algèbre $su(N)$ des matrices $n \times n$ hermitiennes de trace nulle. Le but de cet exercice est de tracer le diagramme de Dynkin de $su(N)$.

   On peut construire une base de la sous-algèbre de Cartan en généralisant les générateurs T_3 et T_8 de $su(3)$ (obtenus à partir des matrices de Gell-Mann). Les $N-1$ matrices diagonales indépendantes H_m sont définis par

$$(H_m)_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}} \left(\sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}\delta_{jk} - m\,\delta_{i,m+1}\delta_{j,m+1} \right).$$

   (a) Montrer que les $N(N-1)$ matrices

$$(e_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$$

   diagonalisent l'action adjointe des H_m, c-à-d qu'ils sont les vecteurs propres associés aux racines de $su(N)$.

   Indice : pour ce point il suffit de démontrer que le commutateur de e_{ij} avec une matrice diagonale est proportionnel à e_{ij}.

   (b) Donner les poids ν^j $(j = 1, \ldots, N)$ de la représentation engendrée par les matrices $\{H_m, e_{ij}\}$ (appelée représentation fondamentale).

   (c) Donner la racine associée à e_{ij} en fonction des poids ν^j.

(d) Demontrer que les poids satisfont

$$\nu^i \cdot \nu^j = -\frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\,\delta_{ij}\,, \qquad\qquad \sum_{j=1}^{N} \nu^j = 0\,. \tag{1}$$

Indice : Calculer séparément $\nu^i \cdot \nu^i$ et $\nu^i \cdot \nu^j$ avec $i < j$.

Pour faciliter l'identification des racines simples on va modifier (*seulement pour cet exercice !*) la définition de racine (poids) positive. On dit que la racine α est positive si sa *dernière* composante non nulle est > 0. Avec cette convention les racines positives sont $\nu^i - \nu^j$, $i < j$.

(e) Identifier les racines simples.

(f) Calculer la matrice de Cartan de $su(N)$.

(g) Tracer le diagramme de Dynkin de $su(N) \sim A_{N-1}$.

4. Les poids de la représentation fondamentale de $su(N)$ satisfont l'eq. (1). Les N ν^j engendrent un espace de dimension $N-1$, mais on peut considérer une immersion dans un espace de dimension N comme

$$\nu^j = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^j - \frac{\sigma}{N}\right),$$

où les e^j forment une base orthonormale de l'espace de dimension N et

$$\sigma = \sum_{k=1}^{N} e^k\,.$$

Pour obtenir les racines simples de $sp(2N)$ on peut ajouter aux racines simples de $su(N)$ la racine

$$\alpha^N = 2\,\nu^N + \sqrt{\frac{2}{N}}\,\nu^{N+1}\,,$$

où ν^{N+1} est un vecteur unitaire orthogonale à tous les poids de $su(N)$, c-à-d aux ν^j avec $j = 1, \ldots, N$.

(a) Identifier ν^{N+1} et écrire α^N en fonction des vecteurs de base e^j.

(b) Calculer la matrice de Cartan de $sp(2N)$.

(c) Tracer le diagramme de Dynkin de $sp(2N) \sim C_N$.