MATH-F410 – REP. DES GROUPES & APP. A LA PHYS.

Séances d'exercices 2023-2024

Séance 7 : Algèbres de Lie (I)

1. Écrire les éléments de matrice des opérateurs de la représentation adjointe en termes des constantes de structure.

2. Soit I un idéal d'une algèbre de Lie L ; vérifier que L/I possède une structure naturelle d'algèbre de Lie.

3. Soit g une forme bilinéaire symétrique sur l'algèbre de Lie L. Montrer que l'invariance sous les transformations adjointes du groupe,

$$g(\mathrm{Ad}_{tz}x, \mathrm{Ad}_{tz}y) = g(x, y),$$

conduit à la condition d'invariance écrite au cours

$$g([x, z], y) = g(x, [z, y]).$$

Rappel : $\mathrm{Ad}_{tz}x \equiv e^{tz}\, x\, e^{-tz}$.

4. Soit $g(x, y)$ une forme bilinéaire symétrique invariante sur l'algèbre de Lie L. Écrire la condition d'invariance dans une base $\{X_a\}$ en termes des composantes $g_{ab} \equiv g(X_a, X_b)$ et des constantes de structure.

5. On appelle k la forme de Killing $k(x, y) \equiv \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \cdot \mathrm{ad}_y)$ et α la forme définie par $\alpha(x, y) \equiv \mathrm{tr}(xy)$. On se restreint aux algèbres de Lie matricielles.

   (a) Montrer que $u(2) = u(1) \oplus su(2)$.

   (b) Calculer α et k pour $u(1)$.

   (c) Calculer α et k pour $u(2)$.

   (d) Calculer α et k pour $su(2)$.

6. Soit L une algèbre de Lie. Montrer que $L' \equiv [L, L]$ (combinaisons linéaires des commutateurs) est un idéal de L.

   Remarque : cette algèbre de Lie L' est appellée algèbre de Lie dérivée.

   En déduire que si L est simple, tout élément peut s'écrire comme combinaison linéaire de commutateurs.

7. (a) Montrer que $su(2)$ est une algèbre de Lie simple.

   (b) Montrer que $su(2) \oplus su(2)$ n'est pas une algèbre de Lie simple et exhiber ses idéaux non triviaux. En conclure que $su(2) \oplus su(2)$ est semi-simple.

8. (a) Soit $L = \oplus_{i=1}^{n} L_i$ une somme directe d'algèbres de Lie simples compactes. Montrer que L est semi-simple.

   (b) Montrer que $g(L_i, L_j) = 0$ $(i \neq j)$ pour toute forme bilinéaire symétrique invariante sur L.

   Indice : Utiliser le résultat de l'exercice 6.

   (c) Soit g_i une forme bilinéaire invariante sur L_i. Montrer que la forme bilinéaire sur L la plus générale est de la forme $g = \sum_i \lambda_i g_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

   Remarque : Après cette exercice on connait trois façons équivalentes pour caractériser les algèbres de Lie semi-simples compactes : L est semi-simple compact ssi

   - elle est compacte et ne possède pas d'idéal abélien non-trivial ;
   - la forme de Killing est non dégénérée et définie positive ;
   - elle est somme directe d'algèbres de Lie simples compactes.

9. Soit $\{X_a\}$ une base de l'algèbre de Lie L. Montrer que si $\mathrm{tr}(X_a X_b) = \lambda\, \delta_{ab}$, les constantes de structures $C_{abc} \equiv \delta_{am} C^{m}_{\ bc}$ sont complètement antisymétriques.

10. Montrer que la trace de tout générateur de n'importe quelle représentation d'une algèbre de Lie simple compacte est égale à zéro.