MATH-F410 – REP. DES GROUPES & APP. A LA PHYS.

Séances d'exercices 2023-2024

Séance 6 : rappels sur $SU(2)$ et sur l'exponentielle d'une matrice

1. On dénote une rotation infinitésimale par $R = 1 + \epsilon J$.

   (a) Montrer que la matrice J est antisymétrique, c-à-d $J = -J^T$.

   (b) On dénote par R_1, R_2 et R_3 les rotations autour des axes $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Montrer que pour les rotations infinitésimales correspondantes J_1, J_2, J_3 on a

   $$[\, J_i, J_j \,] = \epsilon_{ijk} J^k \,.$$

   (c) On définit les éléments de base de la forme bilinéaire symétrique comme

   $$g_{ij} = -\frac{1}{2} Tr(J_i J_k)$$

   Montrer qu'il s'agit d'une forme invariante. Comme $su(2)$ est simple, elle est inversible. On dénote son inverse par g^{ij}.

   (d) Montrer que l'élément de Casimir $\vec{J}^2 = g^{ij} J_i \cdot J_j$ commute avec l'algèbre,

   $$[\, \vec{J}^2, J_i \,] = 0 \,.$$

   Remarque : Comme on considère des algèbres matricielles, on peut définir l'algèbre enveloppante avec le produit matriciel $\cdot$ qui contient notamment $\vec{J}^2$.
   Remarque : Dans une représentation T de $SU(2)$, $T(\vec{J}^2)$ est l'*opérateur de Casimir* et par le lemme de Schur il doit être multiple de l'identité.

   (e) On considère dorénavant des générateurs hermitiens, c-à-d on considère $J_i \to iJ_i \;\Rightarrow\; J_i^\dagger = J_i$ et $[\, J_i, J_j \,] = i\,\epsilon_{ijk} J^k$. On dénote aussi

   $$J^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(J_1 \pm i J_2 \right) .$$

   Montrer que

   $$[\, J_3, J^\pm \,] = \pm J^\pm \,, \qquad [\, J^+, J^- \,] = J_3 \,, \qquad (J^+)^\dagger = J^- \,.$$

   (f) Montrer que si $|m\,\rangle$ est un vecteur propre de J_3, c-à-d $J_3|m\,\rangle = m|m\,\rangle$, alors $J_\pm|m\,\rangle$ est un vecteur propre de J_3 avec valeur propre $(m \pm 1)$.

2. On considère des représentations finies de $SU(2)$. Comme J_3 est hermitien, il est diagonalisable. Soit j sa plus grande valeur propre et soient $|j, \alpha\rangle$ les vecteurs propres correspondants, $\alpha = 1, \ldots, k$.

(a) Montrer que la valeur propre minimum de J_3 est $-j$ et que $k = 1$ pour une représentation irréductible.

Remarque : Les valeurs propres de J_3 sont appelés *poids* de la représentation. Le vecteur propre correspondant à la valeur maximum j de la représentation D_j est appelé *vecteur de plus haut poids.*

Indice : Soit construire la représentation en agissant avec J^- et calculer les normalisations. Soit utiliser $J^- J^+ = \frac{1}{2}\left(\vec{J}^2 - J_3^2 - J_3\right)$ (après démonstration !).

(b) Montrer que $j = \frac{n}{2}$ où $n \in \mathbb{N}$.

(c) Calculer les éléments de matrice

$$\langle\, j, m' | \vec{J}^2 | j, m \,\rangle\,, \qquad \langle\, j, m' | J_3 | j, m \,\rangle\,,$$
$$\langle\, j, m' | J^+ | j, m \,\rangle\,, \qquad \langle\, j, m' | J^- | j, m \,\rangle\,,$$

où on dénote par j le poids maximum et par m les valeurs propres de J_3.

3. On considère l'opérateur $\vec{J} = \vec{\mathcal{J}}_1 \otimes I + I \otimes \vec{\mathcal{J}}_2$ dans la représentation de l'algèbre associée à la représentation $D_{j_1} \times D_{j_2}$ du groupe $SU(2)$.

(a) Montrer que $[\, J_i, J_j \,] = i\, \epsilon_{ijk} J^k$.

(b) Montrer que $[\, \vec{J}^2, \vec{\mathcal{J}}_1^2 \otimes I \,] = 0$, mais $[\, \vec{J}^2, \mathcal{J}_{z1} \otimes I \,] \neq 0$. On peut donc considerer soit une base de vecteurs propres de $\vec{\mathcal{J}}_1^2$, $\vec{\mathcal{J}}_2^2$, $\mathcal{J}_{z1}$, $\mathcal{J}_{z2}$ soit une base de vecteurs propres de $\vec{J}^2$, $\vec{\mathcal{J}}_1^2$, $\vec{\mathcal{J}}_2^2$, J_z. La matrice de changement de base est

$$|j_1, j_2; J, M\,\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\,\rangle\langle\, j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2; J, M\,\rangle$$

et les éléments de matrice $\langle\, j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2; J, M\,\rangle$ sont appellés *coefficients de Clebsch-Gordan* de $SU(2)$.

Remarque : D'habitude on va omettre j_1, j_2 dans le ket et la convention de phase habituelle est $\langle\, j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M = J\rangle$ réel ≥ 0. On peut obtenir que $\langle\, j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M\,\rangle \neq 0$ ssi $M = m_1 + m_2$ et $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$.

4. Si A est une matrice $n \times n$ complexe on définit $\exp A \equiv e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$. Démontrer les énoncés suivants :

(a) $e^X e^Y = e^{X+Y}$ si $[X, Y] = 0$;

(b) e^X admet un inverse ;

(c) $(e^X)^\dagger = e^{X^\dagger}$;

(d) $\frac{d}{dt}(e^{tX}) = X e^{tX}$;

(e) $\det e^X = e^{\mathrm{tr}(X)}$.