MATH-F410 – REP. DES GROUPES & APP. A LA PHYS.

Séances d'exercices 2023-2024

Séance 4 : Application des groupes finis à l'algèbre de Dirac

1. Soit γ^μ les matrices de Dirac,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & iI_{2\times 2} \\ iI_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^i \\ -i\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

où les matrices 2×2 σ^i sont les matrices de Pauli. Les matrices de Dirac obéissent à l'algèbre

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\,\eta^{\mu\nu} I_{4\times 4}\,, \qquad \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-,+,+,+)\,. \tag{1}$$

On appelle représentation de l'algèbre de Dirac tout ensemble de 4 matrices qui satisfont aux relations d'anticommutation (1). Cette représentation est irréductible si les opérateurs $T(\gamma^\mu)$ ne laissent aucun sous-espace non-trivial invariant. Le but de cet exercice est de montrer, en utilisant la théorie des groupes, qu'il existe une seule représentation irréductible de l'algèbre de Dirac.

A partir des matrices de Dirac, on peut former les 6 matrices $\Gamma^{(6)}_A \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu$ $(\mu < \nu)$, les 4 matrices $\Gamma^{(4)}_\Delta \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho$ $(\mu < \nu < \rho)$ et la matrice $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Soit G l'ensemble des 32 matrices 4×4 suivantes :

$$G = \{\pm I, \pm\gamma^\mu, \pm\Gamma^{(6)}_A, \pm\Gamma^{(4)}_\Delta, \pm\gamma^5\}\,.$$

(a) Soit $a \in G$; montrer que $a^2 = I$ ou $a^2 = -I$ de sorte que $a^{-1} = a$ ou $-a$ (Indication : ici et dans les prochains points utilisez (1) sans calculer explicitement tous les 32^2 produits des matrices 4×4 appartenant à G).

(b) Soient $a, b \in G$. Montrer que $ab = \pm ba$ (les matrices commutent ou anticommutent). En outre, montrer que pour tout $a \neq \pm I$, il existe $b \in G$ tel que $ab = -ba$. Montrer qu'en fait on peut supposer que b est une des matrices γ^μ.

(c) Montrer que G est un groupe pour la multiplication matricielle.

(d) Montrer que la représentation qui associe à chaque élément de G lui-même ($a \in G \to a$) est irréductible (calculer son caractère).

(e) Montrer qu'il existe 17 classes de conjugaison de G.

(f) Calculer le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de G.

(g) Montrer que dans toute représentation irréductible de G, l'élément $-I$ est représenté par un multiple de l'identité, $T(-I) = \lambda\, I_m$ où $\lambda^2 = 1$, m est la dimension de la représentation et I_m la matrice identité $m \times m$.

(h) Montrer que si $\lambda = 1$, alors la représentation est de dimension 1 (Indice : montrer d'abord que les matrices $T(a)$ ($\forall a \in G$) commutent toutes entre elles). Montrer qu'alors $T(a) = \pm 1$ (où le signe dépend de a).

(i) Montrer qu'inversément, si la représentation est de dimension 1, alors $\lambda = 1$ car les $T(a)$ commutent entre elles.

(j) Montrer que les représentations irréductibles ρ_i de dimension 1 de G sont obtenues en choisissant $\rho_i(\gamma^\mu) = \pm 1$ de 2^4 manières possibles.

(k) Soit T une représentation irréductible de l'algèbre de Dirac. Montrer qu'elle définit naturellement une représentation du groupe G.

(l) Montrer que l'inverse n'est pas vrai : il n'existe aucune représentation de l'algèbre de Dirac qui soit de dimension 1.

(m) En déduire qu'il n'existe qu'une seule représentation irréductible de l'algèbre de Dirac.