MATH-F410 – REP. DES GROUPES & APP. A LA PHYS.

Séances d'exercices 2023-2024

Séance 3 : Représentations du groupe dihédral et d'un produit tensoriel, sous-espace invariants

1. Démontrez que si une classe de conjugaison est son propre inverse ($\forall g \in C,\ g^{-1} \in C$), le caractère d'une représentation irréductible évalué sur un élément de cette classe est réel,
$$\chi_i(g) = \chi_i^*(g), \qquad \forall g \in C.$$

2. Soit le groupe dihédral D_4, c'-à-d du groupe des symétries d'un carré (rotations et réflexions).
   (a) Construire la table des produits des éléments de D_4.
   (b) Construire les classes de conjugaison ainsi que la table des caractères associée du groupe.
   Indice : Pour se guider, on pourra s'aider du fait que deux éléments conjugués ont le même ordre. N'oublions pas non plus que, pour des sous-groupes de S_n la représentation alternée à une dimension existe toujours.

3. Soient T^1 et T^2 deux représentations d'un groupe G.
   (a) Démontrer que $(T^1 \otimes T^2)(g) \equiv T^1(g) \otimes T^2(g)$ est une représentation de G.
   (b) Démontrer que pour le caractères on a $\chi_{T^1 \otimes T^2} = \chi_{T^1} \cdot \chi_{T^2}$.

4. Soit T^1 la représentation triviale de S_3, T^2 la représentation alternée de dimension 1 et T^3 la représentation irréductible de dimension 2.
   (a) Calculer le système de caractères des produits tensoriels $T^i \otimes T^j$ pour tous $1 \leq i \leq j \leq 3$.
   (b) Construire les matrices de la représentation $T^3 \otimes T^3$.
   (c) Trouver les sous-espaces invariants pour les matrices de la représentation $T^3 \otimes T^3$.
   Indice : Utiliser les projecteurs construits au cours pour trouver les sous-espaces invariants.

Représentation de S_3 de dimension 2

$$e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (123) \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad (132) \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(12) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (13) \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad (23) \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Représentation régulière de S_3

$$e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (12) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(123) \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (23) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(132) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (13) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$