MATH-F410 – REP. DES GROUPES & APP. A LA PHYS.

Séances d'exercices 2023-2024

# Séance 2 : théorème de Burnside et orthogonalité des caractères

---

**Rappel 1 : théorème de Burnside**

L'ordre d'un groupe $G$ fini est égal à la somme des dimensions des représentations irréductibles d'un système complet de représentations de ce groupe,

$$|G| = \sum_{i=1}^{m} (\dim T^i)^2 \,. \tag{1}$$

**Remarque** : Dans la somme il y a toujours un "1" car la représentation triviale est irréductible.

---

**Rappel 2 : orthogonalité des caractères**

Les caractères sont des fonctions complexes sur un groupe $G$ et on peut définir un produit scalaire entre elles comme

$$(\chi_i|\chi_j) \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi^*_{T^i}(g)\chi_{T^j}(g) \,. \tag{2}$$

Si les $T_i$ forment une famille complète de représentations irréductibles d'un groupe fini alors

$$(\chi_i|\chi_j) = \delta_{ij} \,. \tag{3}$$

La première consequence de (3) est qu'une représentation $T$ est irréductible ssi

$$(\chi_T|\chi_T) = 1 \,. \tag{4}$$

Les caractères sont des fonctions de classe, c'-à-d qui ne dépendent que des classes d'équivalence d'éléments conjugués, $\chi(g) = \chi(h^{-1}gh)$. On peut donc écrire (3) comme

$$\sum_{\alpha} n_\alpha \, (\chi_i^\alpha)^* \chi_j^\alpha = n \, \delta_{ij} \,, \tag{5}$$

où $n$ est l'ordre du groupe, $n_\alpha$ le nombre d'éléments dans la classe de conjugaison $C_\alpha$, $\chi_i^\alpha$ le caractère de la classe $C_\alpha$ dans la représentation $T^i$ et on additionne sur toutes les classes d'éléments conjugués.

**Exercices**

1. On considère le groupe symétrique $S_4$ des permutations de 4 objets.

   (a) Calculer les classes d'éléments conjugués de $S_4$.

   (b) Montrer que le sous-ensemble $V \equiv \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ est un sous-groupe normal de $S_4$.

   (c) Montrer que le groupe quotient $S_4/V$ est isomorphe à $S_3$.

   (d) Soit $T$ une représentation de $S_3$. Montrer qu'elle induit une représentation $\tilde{T}$ de $S_4$ par la formule
   $$\tilde{T}(g) = T(gV) \quad \forall\, g \in S_4,$$
   où $gV$ est la classe latérale de $g \in S_4$ par $V$. Montrer que $\tilde{T}$ est irréductible si $T$ est irréductible.

   **Indice** : Utiliser le critère d'irréductibilité basé sur le caractère d'une représentation.

   (e) En utilisant le point précédent, donner 3 représentations irréductibles inéquivalentes de $S_4$ et calculer leurs caractères.

   (f) Déterminer le nombre et les dimensions des représentations irréductibles de $S_4$.

   (g) Calculer la table des caractères d'un système de représentations irréductibles inéquivalentes de $S_4$.

2. Soit $G$ le groupe des rotations à 3 dimensions d'angle $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ et $\frac{3\pi}{2}$ autour de l'axe $\vec{1}_z$.

   (a) Quel est le nombre de représentations irréductibles inéquivalentes de $G$ ?

   (b) Construire explicitement un système de telles représentations irréductibles et dresser la table des caractères.

   (c) Construire la représentation régulière de $G$. Calculer son système de caractères. Vérifier qu'il est bien égal à la somme directe des caractères du système de représentations irréductibles construit en (b).

3. Montrer que toute représentation irréductible d'un groupe abélien de dimension finie est de dimension 1.