MATH-F410 – REP. DES GROUPES & APP. A LA PHYS.

Séances d'exercices 2023-2024

Séance 1 : Groupes finis d'ordre ≤ 7, théorème de Cayley, théorème de Lagrange

1. Groupes finis d'ordre 4 :
   (a) Montrez que tous les groupes d'ordre 4 sont abéliens.
   (b) Identifiez tous les groupes d'ordre 4.
   Indice : Dressez la table des produits et tirez profit du fait que dans chaque colonne ainsi que dans chaque ligne du tableau chaque élément du groupe apparait une et une seule fois (démontrez-le !).
   (c) Identifiez les sous-groupes de S_4 qui sont isomorphes aux groupes précédents et décomposez-les en produits de cycles à support disjoint.
   Remarque : A l'exception de l'identité, toutes les translations à gauche et à droite changent tous les éléments. Les permutations avec cette propriété forment le groupe des *permutations régulières*.
2. Applications du théorème de Cayley :
   (a) Démontrez qu'un groupe de permutations régulières est composé de cycles de même longueur.
   (b) Le résultat précédent caractérise la structure des groupes finis d'ordre n premier. Explicitez. Listez tous les groupes d'ordre 5 et 7.
3. Groupes finis d'ordre 6 :
   (a) Montrez que si H est un sous-groupe d'ordre h de G alors h est un diviseur de l'ordre n de G. C'est le théorème de Lagrange.
   (b) Utilisez cette information pour identifier la table des produits de tous les groupes d'ordre 6.
   (c) Identifiez à partir de la liste précédente le groupe qui est isomorphe à S_3.
   (d) Quel est le groupe isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$?
   (e) Énumérez les dimensions de toutes les représentations irréductibles inéquivalentes des groupes d'ordre 6.
4. Identifiez les représentations régulières de tous les groupes finis d'ordre 4.
5. Le centre $Z(G)$ d'un groupe G est défini comme l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G. Montrez que $Z(G)$ est un sous-groupe normal de G.