Groupes : notions de base

<u>Définition</u> : Un groupe est un ensemble G doté d'une application "produit/multiplication" $\cdot : G \times G \to G$ satisfaisant trois axiomes :

1) Associativité : Soient $g_1, g_2, g_3 \in G$, alors $(g_1, (g_2, g_3)) = ((g_1, g_2), g_3)$ c.à.d. $g_1(g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$

2) Existence d'un élément neutre "e" tel que $g \cdot e = e \cdot g = g \quad \forall g \in G$

3) Existence d'un élément inverse g^{-1} pour tout $g \in G$ tel que $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$

<u>Remarques</u> : 1) Le neutre est unique :

<u>Dém.</u> : Soient e_1 et e_2 deux éléments neutres. Alors, $g \cdot e_1 = g \cdot e_2 = g \quad \forall g \in G$. ~~Donc~~ Or $g^{-1} \cdot (g \cdot e_1) = g^{-1} \cdot (g \cdot e_2)$ $\Rightarrow (g^{-1} g) \cdot e_1 = (g^{-1} g) \cdot e_2 \Rightarrow e_1 = e_2$ $\boxtimes$

2) Pour tout $g \in G$, g^{-1} est unique :

<u>Dém.</u> : $g \cdot b = g \cdot a = e \Rightarrow b = a$ $\boxtimes$

<u>Def.</u> : Un groupe G est Abélien si $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 \quad \forall g_1, g_2$

Exemples

1) $\mathbb{R}$? $(\mathbb{R}, \cdot)$ n'est pas un groupe car 0 n'a pas d'invers
$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe

2) $\mathbb{Z}$? $(\mathbb{Z}, \cdot)$ pas un gp. car $n^{-1} \notin \mathbb{Z}$ pour $n \neq 1$.
$(\mathbb{Z}, +)$ est un gp.

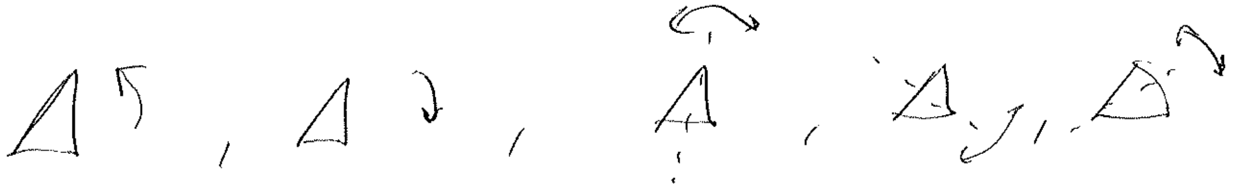
3) ~~$\mathbb{Q}$~~ $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ est un groupe, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ aussi., $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ ✓

4) $GL(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C})$ non-Abeliens
e.g.: $\sigma_1 \sigma_2 = i\sigma_3$, $\sigma_2 \sigma_1 = -i\sigma_3$

$\mathbb{Z}_n = \{g_1, g_2, \dots, g_n\} = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ with $a^n = e$

S_n = groupe de permutations de n objects

S_3 =



D_n : symmetries d'un n-gon regulier.

~~Table de Cayley~~

Homomorphismes

<u>Déf.</u> : Soient G_1 et G_2 deux groupes. Un homomorphisme ϕ de G_1 à G_2 est une application sur les ensembles
$\phi : G_1 \to G_2$ qui respecte les multiplications. C.à.d.,
$\forall\ g, h \in G_1$ on a $\quad \phi(g) *_2 \phi(h) = \phi(g *_1 h)$

<u>E.g.</u> : 1) $\det : GL(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$
$$M_{n\times n} \longrightarrow \det(M_{n\times n})$$

$\forall\ M_1, M_2$, on a $\quad \det(M_1 M_2) = \det(M_1)\det(M_2)$

2) $(\ )^n : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$
$$z \longmapsto z^n$$

Théorème de Cayley

<u>Déf.</u> : Soit G un groupe et X un ensemble. Une action ϕ de G sur X à gauche est une application
$\phi : G \times X \to X$ telle que :

1) Pour tout g_1 et g_2 et tout $x \in X$, $\quad \phi(g_1, \phi(g_2, x)) = \phi(g_1 g_2, x)$
2) $\phi(e, x) = x$ pour tout x

Fixons un élément $g \in G$. Alors l'application
$\phi_g : X \to X \quad x \mapsto (g, x)$ est une bijection

Dém. : 1) ϕ_g est injectif car si $\phi(g, x_1) = \phi(g, x_2)$

alors $\phi(g^{-1}, \phi(g, x_1)) = \phi(g^{-1}, \phi(g, x_2))$ or

$$= \phi(e, x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad " = x_2$$

2) ϕ_g est surjectif car, $\forall x \in X$, on a l'element $y = \phi(g^{-1}, x) \in X$

avec $\phi_g(y) = \phi(gg^{-1} = e, x) = x$

∎

Def. : Pour un ensemble X, on définit le groupe $Sym(X)$

$Sym(X) = \{ f : X \to X \mid f \text{ est une bijection} \}$. Le produit

est la composition d'applications $g \cdot f = g \circ f$.

~~Thm. (Cayley) : Le homomorphisme $\alpha : G \to Sym(G)$ tel que $\alpha : g \mapsto \phi_g$ est injectif.~~

~~Demonstration :~~

Thm. (Cayley) : L'application $\alpha : G \to Sym(G)$

$\alpha : g \mapsto \phi_g$ est un homomorphisme injectif.

Dém. : 1) Homomorphisme : Soient $g_1, g_2 \in G$. Alors

$\alpha(g_1 g_2) = \phi_{g_1 g_2}$. Or, $\phi_{g_1 g_2} : x \mapsto \phi(g_1 g_2, x) = \phi(g_1, \phi(g_2, x))$

$$= \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}(x) \quad \forall x \in G$$

Donc $\alpha(g_1 g_2) = \phi_{g_1} \cdot \phi_{g_2}$

G admet une action canonique sur lui-même appellée translation à gauche : $t_L : G \times G \longrightarrow G$

$$(g, h) \longmapsto g \cdot h$$

<u>Thm. (Cayley)</u> : L'application $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Sym}(G)$

$$g \longmapsto t_L(g, -) \equiv g_L$$

est un homomorphisme injectif.

<u>Dém.</u> : 1) Homomorphisme : $\forall g_1, g_2 \in G \quad \alpha(g_1 g_2) = (g_1 g_2)_L$

Or $(g_1 g_2)_L : g \longmapsto (g_1 g_2) g = g_1 (g_2 g) = (g_1)_L ((g_2)_L (g))$

$$= (g_1)_L \circ (g_2)_L (g)$$

Donc $\alpha(g_1 g_2) = \alpha(g_1) \circ \alpha(g_2)$

2) Injectif : Soient $g_1, g_2 \in G$. Supposons que $\alpha(g_1) = \alpha(g_2)$.

Alors, $\forall g \in G$ on a $(g_1)_L (g) = g_1 g = (g_2)_L (g) = g_2 g$

Donc $g_1 g g^{-1} = g_2 g g^{-1} \Rightarrow g_1 = g_2$

$\boxtimes$

Donc, tout groupe fini discret est un sous-groupe d'un S_n

Thm. : Soit $\phi : G_1 \to G_2$ is homom. Alors

ϕ est injectif $\iff$ $\phi^{-1}(e_2) = e_1$ ($\ker\phi = e_1$)

Dém. : "$\Rightarrow$" : Soit $g \overset{\in G_1}{\neq} e_1$ avec $\phi(g) = e_2$. Alors $\phi(g) = \phi(e_1)$.

Donc ϕ ~~inj~~.

"$\Leftarrow$" : Supposons que $\ker\phi = e_1$. Soient $g_1 \neq g_2$ avec

$\phi(g_1) = \phi(g_2)$. Alors $\phi(g_1 g_2^{-1}) = \phi(g_1)\cdot\phi(g_2^{-1}) = \phi(g_1)\cdot\phi(g_2)^{-1} = e_2$

avec $g_1 g_2^{-1} \neq e_1$ $\longrightarrow$ $\times\!\!\!\times$

Sous-groupes

Déf. : Un sous-groupe H de G est un sous-ensemble $H \subseteq G$

tel que $h_1 h_2 \in H \quad \forall\, h_1, h_2 \in H$.

E.g. : - $(\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{Q}, +) \subset (\mathbb{R}, +) \subset (\mathbb{C}, +)$

$(\mathbb{Q}^*, \times) \subset (\mathbb{R}^*, \times)$

- $SL(n, \mathbb{C}) = \{ M_n \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det(M_n) = 1 \} \subset GL(n, \mathbb{C})$

e.g. : $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$.

- Pour un homom. $\phi : G_1 \to G_2$, $\ker\phi \equiv \{ g \in G_1 \mid \phi(g) = e_2 \}$

$\boxed{\ker\phi \subset G_1.}$ $\Rightarrow$ Cayley : G fini $\leq S_n$ pour un certain n.

$\mathrm{Im}\,\phi \equiv \{ g \in G_2 \mid \exists\, h \in G_1 \text{ avec } \phi(h) = g \}$

$\boxed{\mathrm{Im}\,\phi \subset G_2}$

Cosets : Classe suivant un sous-gp

Soit G un groupe et $H \leq G$ un sous-groupe. ~~On appelle~~ et $g \in G$. On appelle "classe à gauche de g suivant H" l'ensemble : $gH \equiv \{ gh \mid h \in H \} \subseteq G$

et "classe à droite ..." $Hg \equiv \{ hg \mid h \in H \} \subseteq G$.

E.g. : $G = (\mathbb{Z}, +)$, alors $H \equiv n\mathbb{Z} = \{ np \mid p \in \mathbb{Z} \}$ est un sous-gp.

On definit donc pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $rH \equiv \{ np + r \mid p \in \mathbb{Z} \}$

Exemple : $H = 2\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots \}$

$1H = \{ \dots, -3, -1, 1, 3, \dots \}$

Remarques : 1) $\forall$ tout $g \in$ appartient à une classe ~~à~~ à g. et une à dr. $g \in gH$ étant donné que $e \in H$
$\in Hg$

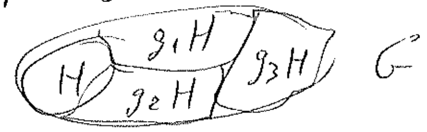
2) Si ~~deux~~ g appartient à deux classes à droite (gauche) $g \in Hg_1$ et $g \in Hg_2$, alors $Hg_1 = Hg_2$.

Dém. : $\exists$ h_1 et h_2 tels que $g = h_1 g_1 = h_2 g_2$. Donc

$g_1 = h_1^{-1} h_2 g_2 \in Hg_2$, et, de même, $g_2 \in Hg_1$.

Donc, $\forall$ $l \in Hg_1$ $\exists$ h tel que $l = hg_1 = h h_1^{-1} h_2 g_2$
$\Rightarrow l \in Hg_2$. Donc $Hg_1 \subseteq Hg_2$. De même, $Hg_2 \subseteq Hg_1$. $\boxtimes$

Il en découle donc que G est "partagé" en classes ~~gH~~ Hg (gH).



Def.: Pour un groupe fini G, on ~~dit~~ appelle l'ordre $|G|$ de G sa cardinalité.

E.g.: $|\mathbb{Z}_n| = n$, $|S_n| = n!$

Thm. (Lagrange): Pour tout sous-gp H d'un gp. G, $|H|$ divise $|G|$.

Def.: L'indice $(G:H)$ de H en G est le nombre de "left cosets".

$(G:1) = |G|$

Lagrange: $(G:1) = (G:H)(H:1)$

Thm.: $\forall\ H \supset K$ sous-gp. de G on a

$$(G:K) = (G:H)(H:K).$$

Def.: Un sous-gp $H \subseteq G$ est dit "normal" si, $\forall g\ G$, $gH = Hg$.

Dans ce cas là, les classes Hg définissent un groupe G/H appelé "groupe quotient", avec produit $(Hg_1)(Hg_2) \equiv H(g_1 g_2)$.

~~Don~~ Le produit est bien défini, car

$$(Hg_1)(Hg_2) = (H)(g_1 H) g_2 = (H)(Hg_1)g_2 = Hg_1g_2$$

~~E, g~~

Table de Cayley

$$\begin{array}{c|ccccc} & e & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ \hline e & e & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & g_1 & g_1^2 & g_1g_2 & \cdots & g_1g_n \\ g_2 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ g_n & & & & & \end{array}$$

$\underline{S_3}$: permutations de trois objets Δ

Notation 1 : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b & c \\ \sigma(a) & \sigma(b) & \sigma(c) \end{pmatrix}$ pour $\sigma \in S_3$

Notation 2 : $(a_1\ a_2 \cdots a_n) = a_1 \to a_2,\ a_2 \to a_3, \cdots, a_n \to a_1.$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

$S_3 = \{ e, (12), (13), (23), (1\,2\,3), (3\,2\,1) \}$

$(12)^2 = (13)^2 = (23)^2 = e.\qquad (1\,2\,3)^2 = (3\,2\,1)$

$(3\,2\,1)^2 = (1\,2\,3)\ ,\qquad (1\,2\,3)^3 = (3\,2\,1)^3 = e$

$(1\,2\,3)^{-1} = (3\,2\,1)$

Thm. : Tout élément de S_n peut s'écrire comme un produit de cycles disjoints.

$\mathbb{Z}_3 = \{ e, (1\,2\,3), (3\,2\,1)\} \subset S_3\ ,\quad S_3/\mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}_2.$

Classes de conjugaison

Déf. : On dit que $g_1, g_2 \in G$ sont conjugués s'il existe un $h \in G$ tel que $g_1 = h g_2 h^{-1}$. $g_1 \sim g_2$

Thm : $\sim$ est une relation d'équivalence.

Dém : 1) $g \sim g$. Évident, il suffit de choisir $h = e$.

2) Si $g_1 \sim g_2$ alors $g_2 \sim g_1$. Posons $g_1 = h g_2 h^{-1}$ pour $h \in G$.

Alors $g_2 = h^{-1} g_1 h = (h^{-1}) g_1 (h^{-1})^{-1}$ □

3) Si $g_1 \sim g_2$ et $g_2 \sim g_3$, alors $g_1 \sim g_3$.

Posons $g_1 = h_1 g_2 h_1^{-1}$, et $g_2 = h_2 g_3 h_2^{-1}$. Alors ~~$g_1 = (h_1 h_2) g_3 (h_2^{-1}$~~

$g_1 = h_1 h_2 g_3 h_2^{-1} h_1^{-1}$. Or $h_2^{-1} h_1^{-1} = (h_1 h_2)^{-1}$ □

E.g. : S_3. $(12) \sim (13) \sim (23)$.

~~(13)~~ $(23) = (12)(13)(12)$ et $(23) = (13)(12)(13)$ et $(12) = (23)(13)(23)$.

$(3\,2\,1) = (12)(1\,2\,3)(12)$

Donc ; on a $S_3 = \{ [e] \times 1, [(12)] \times 3, [(1\,2\,3)] \times 2 \}$

Pour S_n une classe est déterminée par sa structure de cycle disjoint.

Propriétés de S_n 25/09/15 (I)

Rappel : (——) , ( ) ,

Lemme : Soit S_n le gp. Perm $(S = \{a_1, \dots, a_n\})$. $\forall \sigma \in S_n$, et tout a_i, $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $\sigma^k(a_i) = a_i$.

Dem. : S est fini, donc l'ensemble $\{\sigma^l(a_i),\ l \in \mathbb{N}\} \subseteq S$ est aussi fini. Donc $\exists\ m < n$ tels que $\sigma^m(a_i) = \sigma^n(a_i)$.
$\Rightarrow \sigma^m(a_i) = \sigma^m \sigma^{n-m}(a_i) \Leftrightarrow a_i = \sigma^{n-m}(a_i)$. $\square$

Th. : Tout $\sigma \in S_n$ peut s'écrire come $\sigma = \prod_i c_i$.

Dém. : Definissons $E_i = \{a_i, \sigma(a_i), \dots, \sigma^{k_i-1}(a_i)\}$ ou $\sigma^{k_i}(a_i) = a_i$ les orbites de σ. Alors $S = \bigcup_i E_i$ avec $E_i \cap E_j = \emptyset, (i \neq j)$.

Or, sur chaque E_i, σ agit comme un cycle,
$\sigma|_{E_i} = (a_i\ \sigma(a_i)\ \sigma^2(a_i) \dots \sigma^{k_i-1}(a_i))$.

Donc, $\sigma = \prod_i (E_i)$.

Prop. : La decomposition est unique.

Dém. : Chaque $a_i \in S$ ne peut appartenir qu'à un cycle, le cycle $(a_i, \sigma(a_i) \dots, \sigma^{k_i-1}(a_i))$.

Conj. :

Pour S_n, $[\sigma]$ est déterminée par sa structure de cycle.

Thm. : Pour tout $(i_1, \dots, i_k) \in S_n$ et tout $\sigma \; S_n$,

$\pi \equiv \sigma (i_1 \dots i_k) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k))$.

Dém. : a) π envoie $\sigma(i_1) \to \sigma(i_2)$, $\sigma(i_2) \to \sigma(i_3)$ ... et $\sigma(i_k) \to \sigma(i_1)$.

b) π ne déplace pas les éléments autres que $\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k)$.

a) $\pi(\sigma(i_1)) = \sigma(i_1 \dots i_k)(i_1) = \sigma(i_2)$. De même $\pi(\sigma(i_l)) = \sigma(i_{l+1})$ $l < k$, et $\pi(\sigma(i_k)) = \sigma(i_1)$.

b) Prenons $a \notin \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)\}$. Alors $\sigma^{-1}(a) \notin \{i_1, \dots i_k\}$

$\Rightarrow \pi(a) = \sigma (i_1 \dots i_k) \dots = \sigma \cdot \sigma^{-1}(a) = a$,

$\square$

Donc, le conjugué d'un k-cycle est un k-cycle. Est-ce que deux k-cycles sont tjs conjugués ? Oui.

Th. : Les cycles de même longueur sont conjugués.

Dém. : Prenons $(a_1 \dots a_k)$ et $(b_1 \dots b_k)$.

Definissons σ tel que $\sigma(a_i) = b_i$, et σ est un bijection quelconque ~~sur~~ du complément de $(a_1 \dots a_k)$ au compl. de $(b_1 \dots b_k)$, Alors, $\sigma(a_1 \dots a_k)\sigma^{-1} = (b_1 \dots b_k)$ par le thm. précédent.

$\square$

Prop. : Les cycles disjoints commutent.

$\Rightarrow$ On peut définir les "type de cycle".

<u>Prop.</u> : $(a_1 \cdots a_k) = (a_1 a_k)(a_1 a_{k-1}) \cdots (a_1 a_2)$.

<u>Corrolaire</u> : Tout $\sigma \in S_n$ peut s'écrire comme prod. de transpositions.

<u>Thm.</u> : Pour 2 décompositions d'un $\sigma \in S_n$ en transpo.,
$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r = \tau'_1 \cdots \tau'_{r'}$, $r = r' \bmod 2$.

<u>Dém.</u> : Nous avons $\tau_1 \cdots \tau_r (\tau'_1 \cdots \tau'_{r'})^{-1} = e$, c.à.d. e admet une décompos. en un produit de $r+r'$ transpo. Nous allons démontrer que e n'admet pas une décompo. en un nbr. impair de transpo.

Définissons le polynôme $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$, et l'action de S_n sur Δ suivante : $\sigma : \Delta \longrightarrow \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$.

Soit $\sigma = (ij)$ une transpo. Alors, σ affecte les facteurs suivants :

$$\begin{array}{lcl}
x_i - x_j & & (-1) \\
x_i - x_k \,,\; x_j - x_k \,,\; (j<k) & \xrightarrow{\sigma} & \longleftrightarrow \\
x_l - x_i \,,\; x_l - x_j \,,\; (l<i) & & \longleftrightarrow \\
x_i - x_m \,,\; x_m - x_j \,,\; (i<m<j) & & (-1)(\longleftrightarrow)
\end{array}$$

$\Rightarrow \sigma : \Delta \to -\Delta$.

Donc, pour un prod. $\tau_1 \cdots \tau_r$; $\Delta \longrightarrow (-)^r \Delta$. Or $e : \Delta \to +\Delta$.
$\Rightarrow r = 0 \bmod 2$ $\square$

Signes

Def. : Le signe d'une permutation σ est le signe $(-)^r$ où r ~~m~~ est le nombre unique mod 2 tel que $\sigma = \prod_{i=1}^{r} \tau_i$ pour des transpo. τ_i.

Bien défini. ✓

Prop. : $sgn(\sigma\sigma') = sgn(\sigma)\, sgn(\sigma')$, $sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma)$.

Prop. : $sgn((a_1 \dots a_k)) = (-)^{k+1}$.

Dém. : $(a_1 \dots a_k) = (a_1 a_k) \dots (a_1 a_2)$. □

A_n

$A_n = \{\sigma \in S_n \mid sgn(\sigma) = 1\}$.

Prop. : A_n est un groupe. ✓

E.g. : - $S_2 = \{(1), (12)\}$, $A_2 = \{(1)\}$.

- $A_3 = \{(1), (123), (321)\} \cong \mathbb{Z}_3$.

Prop. : A_n est non-Abélien pour $n \geq 4$.

Dém. : A_n contient les 3-cycles. Or $(123)(124) \neq (124)(123)$ □

Prop. : $|A_n| = \frac{n!}{2}$ pour $n \geq 2$.

Dém. : $\tau = (12) \notin A_n$. Si $\sigma \notin A_n$, alors $\sigma\tau \in A_n \Rightarrow \sigma \in A_n\tau$.

$\Rightarrow S_n = A_n \cup A_n\tau$, avec $A_n \cap A_n\tau = \emptyset$.

$|A_n\tau| = |A_n|$ car ~~τ est une~~ bijection $\tau \in$ ~~Aut~~($A_n \leftrightarrow A_n\tau$ □.

D_n

Ⓥ

Def.1 : Gp. de symmétries d'un n-gône régulier :

Def 2 : $D_n = \{ r, s \mid r^n = e,\ s^2 = e,\ s r s^{-1} = r^{-1} \}$.

$\tilde{D}_n = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right\}$.

e.g. : $r \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $s \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$. $\hat{D}_n = D_n$

$|D_n| = 2n$. $D_n = \{ 1, r, \dots, r^{n-1}, s, rs, r^2 s, \dots, r^{n-1} s \}$.

Prop. :

Lemme : Si π_1 est π_2 sont disjoints, Alors $\sigma\pi_1\sigma^{-1}$ et $\sigma\pi_2\sigma^{-1}$ aussi.

Thm. : 2 perm. $\in S_n$ sont conjuguées $\Leftrightarrow$ elles ont le même "type.

Dém. : "$\Rightarrow$") $\pi_1 = c_1 c_2 \cdots c_\ell$, alors $\sigma\pi_1\sigma^{-1} = \sigma c_1 \sigma^{-1} \sigma c_2 \sigma^{-1} \cdots c_\ell \sigma^{-1}$

or, les $\sigma c_i \sigma^{-1}$ ont le même types que les c_i.

"$\Leftarrow$") Posons $\pi_1 = (a_1 \cdots a_{k_1})(a_{k_1+1} \cdots a_{k_1+k_2}) \cdots$

et $\pi_2 = (b_1 \cdots b_{k_1})(b_{k_1+1} \cdots b_{k_1+k_2}) \cdots$.

On définit σ tel que $\sigma(a_i) = b_i$. $\square$

E.g. : - S_3 : $[e] = e$, $[(12)] = \{(12), (13), (23)\}$

$[(123)] = \{(123), (321)\}$

- A_3 : $[e]$, $[(123)]$, $[(321)]$. Notons que $[(123)] \neq [(321)]$

Thm. : Pour $\pi \in A_n$, la classe $[\pi]$ en S_n se brise en de différentes classes en A_n $\Leftrightarrow$ les longueurs de ses cycles sont des nombres impairs distincts.

Groupes quotient

Prenons $H \equiv \mathbb{Z}_3 = \{e, (123), (321)\} \subset S_3$.

Nous avons que $(123) = (13)(12)$, $(321) = (12)(13)$.

$(12)H = \{(12), (23), (13)\} = (13)H = (23)H$ | $H(12) = \{(12), (13), (23)\}$

$(123)H = H = (321)H$. | $\Rightarrow H$ est normal.

Donc, il n'y a que 2 classes, $\{\underset{a}{\underset{\shortparallel}{H}}, \underset{b}{\underset{\shortparallel}{(12)H}}\}$.

$a^2 = a$. $b^2 = (12)H(12)H = H(12)(12)H = H$.

$ab = H(12)H = \underset{ba}{\underset{\shortparallel}{(12)HH}} = (12)H = b$.

$\Rightarrow G/H \cong \mathbb{Z}_2$.

Galois

$$\begin{tikzcd} & S_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A_3 \arrow[dr] & & S_2 \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd}$$

$S_3/A_3 = \mathbb{Z}_2$, $A_3 \cong \mathbb{Z}_3$,

$$\begin{tikzcd} & S_4 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ V_8 \arrow[d] & A_4 \arrow[dl] \arrow[d] & S_3 \arrow[d] \\ V_4 \arrow[dr] & A_3 \arrow[d] & S_2 \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd}$$

$S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$

$\cancel{A_4/A_3 \cong}$

$A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}_3$

$V_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$S_5 \to A_5 \to I$

$S_5/A_5 \cong \mathbb{Z}_2$

$A_5/I = A_5$ non-Ab.

Représentations

25/09/15 (I)

Idée : Etudier les espaces sur lesquels un gp. peut agir. Simplification si l'on "linéarise".

Déf. 1 : Une rep. linéaire ρ de G sur un esp. vect. V est une action
$$\rho : G \times V \to V, \quad (g, v) \mapsto \rho(g)(v)$$
telle que

$$\rho(v_1+v_2) = \rho(v_1) + \rho(v_2) \quad \text{et} \quad \rho(kv) = k\rho(v) \quad \forall k \in \mathbb{C}$$
$$\forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}$$

Déf. 2 : Une rep. lin. ρ de G sur V est un homomorphisme de groupes $\rho : G \to GL(V)$.

Prop. : Les 2 déf. sont équiv.

$\rho(g) : V \to V$ est ~~sur~~ un inversible. ...

Déf. : Un morphisme $\phi : V_1 \to W_2$ entre deux rep. $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$, est un application linéaire $\phi : V_1 \to V_2$ telle que le diagramme est commutatif pour tout $g \in G$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "\phi"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

c.a.d, $\phi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \phi \quad \forall g \in G$.

On peut aussi écrire $\rho_2^{-1}(g)\phi \circ \rho_1(g) = \phi$.

(Entrelacement).

On dit que 2 rep sont isomorphes s'il existe un morphisme inversible.

<u>Défi</u> : Classer les reps d'un gp ~~à moins~~ aux d'isomorphismes près

---

<u>E.g.</u> : $G = \mathbb{Z}$. $\rho(0) = \mathbb{1}$, $\rho(n) \in GL_n$; or

$\rho(n) = \rho(1+1+\dots+1) = \rho(1) \circ \dots \circ \rho(1) = \rho(1)^n$. Donc, le choix de $\rho(1) \in G$ détermine la repr.

$\Rightarrow$ Les classes d'isom. de repr. n-dimensionelles $\overset{bij.}{\longleftrightarrow}$ conj. de GL_n

$\leftrightarrow$ forme canonique de Jordan.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_2 \end{pmatrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$\mathbb{Z}_n = \{e, g, \dots, g^{n-1}\}$, $g^n = e$. $\rho(e) = \mathbb{1}$, $\rho(g^n) = \rho(g)^n = \rho(e)^n = \mathbb{1}$

$\Rightarrow \rho(g)$ détermine la repr.

$$\Rightarrow \rho(g) = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

or, $\rho(g)^n = \mathbb{1} \Rightarrow J_i^n = \mathbb{1}$

Prenons $J = \lambda \mathbb{1} + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$$J^n = (\lambda \mathbb{1} + N)^n = \lambda^n \mathbb{1} + \binom{n}{1} \lambda^{n-1} N + \binom{n}{2} \lambda^{n-2} N^2 + \dots$$

or $\cancel{N^p = \begin{pmatrix} 0 & & 1 & \\ & \ddots & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}$ $\quad N^p = \begin{array}{c} \quad\quad p+1 \\ \begin{pmatrix} 0 & & 1 & & \\ & \ddots & & 1 & \\ & & \ddots & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \; p+1$

donc $J^n = \mathbb{1} \implies \lambda^n = 1$ et $N = 0$.

<u>Thm.</u> : Pour tout repr. de $\mathbb{Z}_n$, ρ sur V, il existe une base telle que ~~tout~~ $\rho(g)$ est diagonale ~~pour~~ $\forall g \in G$, et les coeffs. sont des n-èmes racines de l'unité.

$\square$

n-dim reps $\longleftrightarrow$ n-vecteurs $(\zeta^{k_1}, \dots, \zeta^{k_n})$, $\zeta^n = 1$.

<u>Thm.</u> : Tout groupe Abélien fini est isomorphes à un produit de groupes cycliques.

<u>Prop.</u> : Tout système de matrices diagonalisables qui commutent peut être simultanéement diagonalisé.

$\implies$

<u>Thm.</u> : Toute repr. est un n-vecteur de repr. 1-dim.

Sous-représentations

Déf. : Une sous-rep. de V est un espace G-invariant $W \subseteq V$, c.à.d $\forall w \in W, g \in G \Rightarrow \rho(g)w \in W$.
W est une repr. de G sous l'action des $\rho_V(g)$.

Déf. : V/W pour $W \subseteq V$ est l'espace de cosets $v + W$.
Pour W G-inv., ρ_V définit une action de G sur V/W.
$g(v+W) = \rho(g)(v) + W$. Si $v' = v \mod W$, alors $v - v' \in W$
$\Rightarrow \rho(g)(v-v') \in W$. Donc les classe $\rho(g)v + W$ et $\rho(g)v' + W$ sont égales.

Déf. : La somme directe de 2 repr. (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) est l'espace $V_1 \oplus V_2$ avec l'action $\left(\begin{array}{c|c} \rho_1(g) & 0 \\ \hline 0 & \rho_2(g) \end{array}\right)$.

Déf. : $$V_1 \oplus V_2 = \Big\{\underbrace{(v_1, v_2)}_{v_1 \oplus v_2} \in V_1 \times V_2\Big\} \Big/ \left\{ \begin{array}{l} a(v_1 \oplus v_2) = (a v_1) \oplus (a v_2), \ \forall a \in \mathbb{C} \\ (v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \end{array} \right\}$$

E.g. : $V_1 \subset V_1 \oplus V_2$ est une sous-repr. de $V_1 \oplus V_2$ et $V_2 \cong (V_1 \oplus V_2)/V_1$.

En général $V \neq V/W \oplus W$, or vrai pour G fini (et $F = \mathbb{C}$)

Déf. : Une repr. est complètement réductible lorsqu'elle se décompose en somme directe de rep. irréd.

Prop : Toute repr. cplexe d'un gp. Abélien fini est complètement reductible. Toute repr. irred. est 1-dim.

E.g. : $S_3 \circlearrowright V = \mathbb{C}^3$. $D(e) = \mathbb{1}_3$, $D(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\{e, \sigma = (123), \tau = (12)\}$

Prenons $W \subset V$ avec $W \cong \mathbb{C} = \{ a(1,1,1)^T \mid a \in \mathbb{C} \}$

$G \cdot W = W$.

Définissons le complément orthogonal $W^\perp \equiv \{ v \in V \mid v \cdot (1,1,1) = 0 \}$

Cherchons les vecteurs propres de $D(\sigma)$. ($\sim$ Cartan basis)

$W^\perp = \{ v_1 = (\xi^2, \xi, 1)^T, v_2 = (\xi, \xi^2, 1)^T \}$, $W = \{ v_3 = (1,1,1) \}$.

$D(\sigma) v_i = \xi^i v_i$, $D(\tau) v_1 = v_2$, $D(\tau) v_2 = v_1$, $D(\tau) v_3 = v_3$.

On diagonalise $D(\sigma)$:

$$D(\sigma) \to D(\sigma)' = \begin{pmatrix} v_1^\dagger \\ v_2^\dagger \\ v_3^\dagger \end{pmatrix} D(\sigma) \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & & \\ & \xi^2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$D(\tau) \to D(\tau)' = D(\tau)$ ✓.

On a donc $V \cong \underset{\mathbb{C}}{\underset{\shortparallel}{W}} \oplus \underset{\mathbb{C}^2}{\underset{\shortparallel}{W^\perp}}$

$(D(g)^\dagger = D(g^{-1}) = D(g)^{-1})$.

Th. : Toute repr. d'un gp. fini sur un $\mathbb{C}V_{\mathbb{C}}$ est complètement réductible. (VI)

2 Dém.

I) Def. : Un repr. (ρ, V) de G est unitaire si V est muni d'un produit scalaire Hermitien (i.e., $(w,v) = \overline{(v,w)}$) invariant sous l'action de G. C.à.d $\langle g\cdot w | g\cdot v\rangle = \langle w|v\rangle$ $\forall\, v, w \in V$ et $\forall g\ G$.

V est unitarisable lorsqu'il admet un tel $\langle\,|\,\rangle$.

Propr. : (ρ, V) est unitaire $\iff$ $\rho(G) \subseteq U(V) \subset GL(V)$

$$\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1} = \rho(g)^{\dagger}.$$

Lemme : Toute repr. sur un espace vect. cplexe d'un gp. fini est unitarisable.

Dém. : On prend un $\langle\,|\,\rangle$ hermitien quelconque de V, et on définit sa "moyenne"
$$\langle v|w\rangle_G \equiv \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle g\cdot v|g\cdot w\rangle.$$

Lemme : Soit (ρ, V) une repr. unitaire et $W \subseteq V$ un sous espace invariant. Alors $W^{\perp}$ est aussi invariant.

Dém. : Si $v \in W^{\perp}$, alors $\langle v|w\rangle = 0$ $\forall\, w \in W$. Prenons $g^{-1}w \in W$.
Alors $\langle v|g^{-1}w\rangle = \langle gv|w\rangle = 0$. $\Rightarrow gv \in W^{\perp}$ $\forall g \in G$ QED

Thm. : Toute $\mathbb{C}$-rep. est complètement reductible 2/10/15 (VII)

Dém. : $V \to W \oplus W^{\top} \to \dots \to W_1 \oplus \dots \oplus W_k$. La procédure se termine car $\dim V < \infty$ $\square$

Thm. : Si $W \subseteq V$ est une sous-repr. d'un gp. fini G, alors $\exists$ un espace complémentaire invariant W' tel que $V \cong W \oplus W'$.

Dém. : Prenons une projection quelconque $P : V \to W$, c, à d. $P^2 = P$ et $P|_W = id_W$. Alors, on définit la "moyenne" π de P

$\pi \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ P \circ g^{-1}$. π est un projecteur invariant $\pi : V \to W$.

a) $\pi^2 = \pi$. $P^2 = P$ et $P|_W = id_W$, et $gW \subseteq W$, donc $gPv \subseteq W$ $\forall g, v$.

Donc, $PgPv = gPv$ $\forall g \in G, \forall v \in V$.

$$\Rightarrow \pi^2 = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, \tilde{g} \in G} \tilde{g} \circ P \circ \tilde{g}^{-1} \circ g \circ P \circ g^{-1} = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, \tilde{g}} \tilde{g}\, \tilde{g}^{-1} g P g^{-1}$$

$$= \frac{|G|}{|G|^2} \sum_g g P g^{-1} = \pi$$ ✗

b) $\operatorname{Im} \pi \subseteq W$. $\forall v \in V$, $\pi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_g g P g^{-1} v$. Or, si $Pg^{-1}v \in W$, alors $gPg^{-1}v \in W$.

c) $\pi|_W = id_W$. $\forall w \in W$, $\pi(w) = \frac{1}{|G|} \sum_g g P g^{-1} w$. Or, $g^{-1} w \in W$

$\Rightarrow Pg^{-1}w = g^{-1}w \Rightarrow \pi(w) = w$. $\Rightarrow \operatorname{Im}(\pi) \cong W$.

d) $h \circ \pi = \pi \circ h$ $\forall h \in G$. $\frac{1}{|G|} \sum_g g \circ P g^{-1} h = \frac{1}{|G|} \sum_{g'} h g' P \circ g'^{-1}$ ✓.

e) $W' \equiv \ker \pi$ est invariant. $\pi \circ g = g \circ \pi \quad \forall g \in G$. (VIII)

Donc, si $\pi(w) = 0 \Rightarrow \pi(gw) = g \circ \pi(w) = 0 \quad \forall g$ ✓.

$\Rightarrow W \cap W' = \phi$

$\Rightarrow V = W \oplus W'$ □

Contre-exemples : 1) $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow GL_2(\mathbb{R}) \circlearrowright \mathbb{C}^2$

$a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a+b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{C} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{C}^2$ est invariant.

2) $C_m = \{\xi\} / (\xi^n = e)$, $F = \mathbb{F}_n = \mathbb{Z}/_{n}\mathbb{Z}$,

$\rho : \xi^j \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho : C_n \to GL_2(F)$

Schur

<u>Thm.</u> (Schur) : Soient V et W deux repr. irréd. de G et $\phi : V \to W$ un G-morphisme, alors

1) Soit ϕ est un isomorphisme, soit $\phi = 0$.

2) Si $V \equiv W$, alors $\phi = \lambda \mathbb{1}_V$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$.
   ! (c.à.d $\rho_V(g) = \rho_W(g)$ $\forall g$)

<u>Dém.</u> : 1) $\ker \phi$ et $\operatorname{im} \phi$ sont des sous-espaces invariants de V et W. Donc, soit $\ker \phi = V \Rightarrow \operatorname{im} \phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$, soit $\ker \phi = 0 \Rightarrow \operatorname{im} \phi = W \Rightarrow \phi$ est un isomorphisme.

2) $\mathbb{C}$ est algébriquement fermé, donc $\det(\phi - \lambda \mathbb{1}_V) = 0$ a au moins une solution pour λ,

$\Rightarrow$ Soit λ_0 une telle solution. Alors $\ker(\phi - \lambda_0 \mathbb{1}_V) \neq 0$.

Or $\phi - \lambda_0 \mathbb{1}_V$ est aussi un G-morphisme. $\Rightarrow \ker(\phi - \lambda_0 \mathbb{1}_V) = V$.

c.à.d. $\phi = \lambda_0 \mathbb{1}_V$ $\square$.

<u>E.g.</u> : $G = S_3$, V_2, $\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^2 \end{pmatrix}$; $\rho(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $\phi : V_2 \to V_2$ avec $\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$[\phi, \rho(\sigma)] = \begin{pmatrix} 0 & b(\xi^2 - \xi) \\ c(\xi - \xi^2) & 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \iff b = c = 0$$

$$[\phi, \rho(\tau)] = \begin{pmatrix} -b + c & d - a \\ a - d & b - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d - a \\ a - d & 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow a = d \Rightarrow \phi = \lambda \mathbb{1}_2$$

Attention ! Si $\rho_V \cong \rho_{V'}$ avec $\rho_V \neq \rho_{V'}$, alors $\phi \neq \lambda \mathbb{1}$. E.g. $\rho'(\sigma) = \begin{pmatrix} \xi^2 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}$

<u>Contre-ex</u> : $\begin{pmatrix} \rho_i & \\ & \rho_i \end{pmatrix} \to$ Perm blocks.

Corrollaire : Toute repr. $\mathbb{C}$ irréd. d'un gp. Abélien fini est 1-dim.

Dém. : $\forall g\, G$, on défini $\rho(g) : V \to V$ un isomorphisme.

~~Donc~~ Or $\rho(g) \circ \rho(h) = \rho(h) \circ \rho(g)$ $\forall h$. $\Rightarrow \rho(g) \propto \mathbb{1}_V$.

Prop. : Pour toute repr. V, la décomposition en repr. irred.

$V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \dots \oplus V_k^{\oplus a_k}$ est unique au choix de bases

des $V_i^{\oplus a_i}$ près.

Les charactères

<u>Idée</u> : Spécifier les $\rho(g)$ en donnant leurs valeurs propres, $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$

Les λ_i sont les solutions de ~~det(ρ(g) − x𝟙_d) = x^d~~.

$$\det(\mathbb{1}_V x - \rho(g)) = x^d - e_1(\lambda_1, \dots, \lambda_d)\lambda^{d-1} + e_2\lambda^{d-2} + \dots + (-1)^d e_d$$

où $e_k(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \equiv \sum_{0 \leq \lambda_{i_1} < \dots < \lambda_{i_k} \leq 1} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}$ $\quad$ $\left(\text{e.g. } e_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3\right)$.

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ les valeurs propres de $\rho(g)$, alors $\{\lambda_1^k, \dots, \lambda_d^k\}$ sont les valeurs propres de $\rho(g)^k$,

<u>Newton</u> : $k e_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i}\, p_i$ où $p_i = \sum_{l=1}^{d} \lambda_l^i$.

Donc, s'il on connait les p_i pour $i = 1, \dots, m$ ou $\rho(g)^m = \mathbb{1}$, alors on connait tous les λ de $\rho(g)$.

<u>Déf</u>: On définit donc le charactère d'une representation (ρ, V) comme

$$\chi_V(g) = \mathrm{tr}_V\, \rho(g) \quad \forall g.$$

<u>Prop.</u> : $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g) \quad \forall h \in G$. Donc $\chi_V \in \mathbb{C}_{class}(G)$.

$$\Rightarrow \{\chi_{V_i}\} \leftrightarrow \{\text{conj.}\}$$

<u>Prop.</u> : $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$, $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$, $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$

$\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V}(g)$. $\qquad \chi_{\Lambda^2 V} = \frac{1}{2}\left[\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)\right]$

Projecteurs

Soit (ρ, V) une repre. de G. On définit $\pi \equiv \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)$

$\forall v\in V$ et $\forall h\in G$, on a $\rho(h)\cdot\pi(v) = \frac{1}{|G|}\sum_g \rho(h\cdot g)v = \frac{1}{|G|}\sum_{g'}\rho(g')v$
$= \pi(v)$ où $g' = hg$.

On note que $\pi^2 = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g_1,g_2}\rho(g_1g_2) = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g_1,\, g'=g_1g_2}\rho(g') = \frac{|G|}{|G|^2}\sum_{g'}\rho(g')$
$= \pi$.

Donc, π est un projecteur $\pi : V\to V^G$ où $V^G \equiv \{v\in G \mid \rho(g)v = v \ \forall g\in G\}$

$V^G = \oplus$ repr. triviales.

$\pi|_{V^G} = id_{V^G}$. On écrit donc $V \cong V^G \oplus V^{G\perp}$ où

$V^{G\perp} \equiv \ker\pi$. Alors, $\boxed{tr\,\pi = \dim V^G} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$

$Hom(V, W) \cong V^*\otimes W$

$V \xrightarrow{\phi} W$, on définit $\phi_i{}^j$ tels que $\phi(v_i) = \sum_j \phi_i{}^j w_j$

$\{v_i\}$ $\{w_j\}$

alors $\phi \longleftrightarrow \phi_i{}^j\, dv^i \otimes w_j$

$\rho_V(g)$, alors $\rho_{V^*}(g) = \rho_V(g^{-1})$, et $\rho_V(g^{-1}) = \overline{\rho_V}(g)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] & W \arrow[d, "\rho_W(g)"] \\ V \arrow[r, "\rho_{Hom}(g)\phi"] & W \end{tikzcd}$$

$\rho_{Hom(V,W)}(g)\,\phi \equiv \rho_W(g)\circ\phi\circ\rho_V(g^{-1})$

Alors, on remarque que $\mathrm{Hom}_G(V,W)$ correspond à l'espace (XIII)
d'applications linéaires qui sont des G-morphismes.

$$\rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)\,\phi = \phi \iff \rho_W(g)\circ\phi\circ\rho_V(g^{-1}) = \phi$$

Donc, pour V et W irréd., nous avons

$$(V^*\otimes W)^G \cong \mathrm{Hom}_G(V,W) \subseteq V^*\otimes W \cong \mathrm{Hom}(V,W).$$

Donc $\dim (V^*\otimes W)^G = \begin{cases} 1 & \text{ssi } V\cong W \\ 0 & \text{ssi } V\not\cong W \end{cases}$

Définissons donc le projecteur pour $V^*\otimes W$,

$\pi_{V^*\otimes W} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_{V^*\otimes W}(g)$. Alors

$$\dim (V^*\otimes W)^G = \mathrm{tr}\,\pi_{V^*\otimes W} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathrm{tr}\,\rho_{V^*\otimes W}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_g \chi_{V^*}(g)\chi_W(g)$$

Donc, nous obtenons la relation d'orthogonalité

Thm.: Soient V et W deux irrep., alors

$$(\chi_V,\chi_W) \equiv \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_V}(g)\,\chi_W(g) = \begin{cases} 1 & \iff V\cong W \\ 0 & \iff V\not\cong W \end{cases}$$

Rappels

Def. : Soit (ρ, V) une repr. d'un gp fini G. On définit le charactère $\chi_{(\rho,V)}(g)$ $\forall g \in G$ comme $\chi_{(\rho,V)}(g) := tr_V\, \rho(g)$

Def. : Soient (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux repr. de G, et $V_1 \oplus V_2$ la somme directe des espaces vectoriels. On définit la somme dir. $(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ des repr. ainsi

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) : v_1 \oplus v_2 \longmapsto \rho_1(g) v_1 \oplus \rho_2(g) v_2 \qquad \forall g, \ \forall v_1 \in V_1, \ v_2 \in V_2.$$

Prop. : $\chi_{(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)}(g) = \chi_{(\rho_1, V_1)}(g) + \chi_{(\rho_2, V_2)}(g) \qquad \forall g.$

Def. : Soient (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux reprs, et $V_1 \otimes V_2$ le produit tensoriel des deux esp. vec. On définit le prod. tensoriel des reps. ainsi :

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) : v_1 \otimes v_2 \longmapsto (\rho_1(g) v_1) \otimes (\rho_2(g) v_2) \qquad \forall g \in G, \ \forall v_1 \in V_1 \ \forall v_2 \in V$$

Prop. : $\chi_{(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)}(g) = \chi_{(\rho_1, V_1)}(g)\, \chi_{(\rho_2, V_2)}(g) \qquad \forall g \in G.$

Soit (ρ_V, V) une repr. de G.

On définit $V^* \equiv \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ tel que si $\phi \in V^*$,

$\phi(\alpha v + \beta w) = \alpha \phi(v) + \beta \phi(w) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \forall v, w \; V$.

$\mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel : $\forall\, \phi_1, \phi_2 \in V^*$, on définit $\alpha \phi_1 + \beta \phi_2 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tel que $(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)(v) = \alpha\phi_1(v) + \beta\phi_2(v) \quad \forall v \in V$.

Donc $\alpha \phi_1 + \beta \phi_2 \in V^*$.

Puisque V^* est un espace vectoriel, peut-on lui attribuer une repr. de G "canonique" par rapport à (ρ_V, V) ?

<u>Candidat 1</u> : Définissons $(\tilde{\rho}, V^*)$ tel que $\tilde{\rho}(g)\phi \equiv \phi \circ \rho_V(g)$

c.à.d., $\forall g \in G$ et $\forall\, \phi \in V^*$ on définit $\phi_g \equiv \tilde{\rho}(g)\phi$ tel que, $\forall v \in V$, $\phi_g(v) = \phi(\rho_V(g)(v))$.

Prenons $\tilde{\rho}(g_1 g_2)(\phi) = \phi_{g_1 g_2}$ tel que $\phi_{g_1 g_2}(v) = \phi(\rho_V(g_1 g_2)(v))$

alors, $\phi_{g_1 g_2}(v) = \phi(\rho_V(g_1)\rho_V(g_2)(v)) = \underbrace{(\tilde{\rho}(g_1)\phi)}_{\phi_{g_1}}(\rho_V(g_2)(v))$

$= \left(\tilde{\rho}(g_2)(\tilde{\rho}(g_1)\phi)\right)(v)$.

$$\Rightarrow \tilde{\rho}(g_1 g_2) \neq \tilde{\rho}(g_1)\tilde{\rho}(g_2)$$

$$\text{"} \quad = \tilde{\rho}(g_2)\tilde{\rho}(g_1).$$

<u>Candidat 2</u> : $\rho_{V^*}(g)\,\phi = \phi \circ \rho_V(g^{-1})$.

Alors $\rho_{V^*}(g_1 g_2)\,\phi(v) = \phi(\rho_V(g_2^{-1} g_1^{-1})(v)) = \phi(\rho_V(g_2^{-1})\rho_V(g_1^{-1})(v))$

$= (\rho_{V^*}(g_2)\phi)(\rho_V(g_1^{-1})(v)) = \Big(\rho_{V^*}(g_1)\big(\rho_{V^*}(g_2)\phi\big)\Big)(v)$

$\Rightarrow \rho_{V^*}(g_1 g_2) = \rho_{V^*}(g_1)\,\rho_{V^*}(g_2)$ ✓

Le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "1"] \\ V \arrow[r, "\rho_{V^*}(g)\phi"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\rho_{V^*}(g)\phi = \phi \circ \rho_V(g^{-1})}$$

<u>Def</u> : Soit (ρ_V, V) une repr. de G, et $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel dual. On définit la repr. (ρ_{V^*}, V^*) duale à (ρ_V, V) ainsi : $\forall g \in G$, $\forall \phi \in V^*$ $\rho_{V^*}(g)(\phi) = \phi \circ \rho_V(g^{-1})$.

<u>$\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$</u>

Soit $dv \in V^*$ et $w \in W$. Alors $dv \otimes w\,(v) = (dv(v))\,w$

$\Rightarrow dv \otimes w : V \longrightarrow W$. D'ailleurs, $dv \otimes w$ est bilinéaire

$\Rightarrow dv \otimes w \in V^* \otimes W$.

Prenons des bases $V = \{v^i\}$ et $W = \{w^j\}$.

Alors, $\forall \phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, on a $\phi(\sum_i a_i v^i) = \sum_i a_i \phi(v^i)$

Définissons la matrice Φ telle que $\phi(v^i) = \sum_j \Phi_j{}^i w^j$

Alors $\phi(a_i v^i) = (\phi_j{}^i a_i) w^j$.

Prenons une base duale $\{dv_i^i\} = V^*$ telle que

$\cancel{dv_i^i(v}$ $dv_i(v^j) = \delta_i{}^j$.

Alors, $\forall \phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, on definit l'objet

$T_\phi \in V^* \otimes W$ $\quad T_\phi = \sum_{i,j} \phi_i{}^j \, w^i \otimes dv_j$.

On constate que $T_\phi(\sum_k a_k v^k) = \sum_{i,j,k} a_k \, \Phi_i{}^j w^i \otimes (\delta_j{}^k)$

$$= \sum_{i,j} (\Phi_i{}^j a_j) w^i = \phi(\sum_k a_k v^k) \checkmark.$$

$\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \#$ de coeffs de $\Phi = (\dim V)(\dim W)$.

$\dim V^* \otimes W = (\dim V^*) \dim W = (\dim V)(\dim W)$

$\Rightarrow \mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$.

Soient (ρ_V, V) et (ρ_W, W) deux repr. de G. V

<u>Def 1</u>: On définit la repr. $\left(\rho_{Hom(V,W)}, Hom(V,W)\right)$ ~~ainsi~~ telle que le diagramme ci-dessous est commutatif.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] & W \arrow[d, "\rho_W(g)"] \\ V \arrow[r, "\rho_{Hom(V,W)}(g)(\phi)"'] & W \end{tikzcd}$$

c.à.d

$$\rho_{Hom(V,W)}(g)\,\phi = \rho_W(g)\circ\phi\circ\rho_V(g^{-1})$$

<u>Def 2</u> : On définit $\left(\rho_{V^*\otimes W}, V^*\otimes W\right)$ ainsi

$$\rho_{W\otimes V^*}(g)\,(w\otimes dv) = \rho_W(g)\otimes\rho_{V^*}(g)\,(w\otimes dv)$$

$$= \left(\rho_W(g)w\right)\otimes\left(dv\circ\rho_V(g^{-1})\right) = \rho_W(g)\circ(w\otimes dv)\circ\rho_V(g^{-1})$$

<u>Prop.</u> : $\chi_{(\rho_{V^*}, V^*)}(g) \underset{(2)}{=} \chi_{(\rho, V)}(g^{-1}) \underset{(1)}{=} \overline{\chi_{(\rho,V)}(g)}$

<u>Dém.</u> : (1) Soit $v^i \in V$ un vecteur propre de $\rho_V(g)$ avec $\rho_V(g)v^i = \lambda_i v^i$. Etant donné que $\exists\, k\in\mathbb{N}$ tel que $\rho_V(g)^k = id_V$, et que $\rho_V(g)^n v^i = \lambda_i^n v^i$, $\Rightarrow \lambda_i^k = 1$.

Donc, toutes les valeurs propres de $\rho_V(g)$ sont des racines de l'unité. Or, $\rho_V(g^{-1})\rho_V(g)v^i = v^i$
$= \lambda_i\,\rho_V(g^{-1})v^i$ $\Rightarrow \rho_V(g^{-1})v^i = \lambda_i^{-1}v^i$

VI

Donc, les valeurs propres de $\rho_V(g^{-1})$ sont les inverses des valeurs propres de $\rho_V(g)$. $\rho_V(g): (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$

$\rho_V(g^{-1}): (\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$. Or, $\lambda_i^{-1} = \bar{\lambda}_i$ pour λ_i une racine de l'unité.

$$\Rightarrow \chi_{(\rho,V)}(g^{-1}) = \bar{\chi}_{(\rho,V)}(g)$$

$\square$

2) $\rho_{V^*}(g)\circ\phi = \phi\circ\rho_V(g^{-1}) \quad \forall \phi \in V^*$. Donc, $\rho_{V^*}(g)$ est une matrice aux valeurs propres de $\rho_V(g^{-1})$

$\square$

Corr. : $\chi_{(\rho_{Hom(V,W)},\, Hom(V,W))}(g) = \overline{\chi_V(g)}\,\chi_W(g) \quad \forall g \in G$.

Nous avons défini pour tout (ρ, V) le projecteur

$$\pi_{V^G} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_V(g) \quad \text{tel que} \quad \pi_{V^G}: V \longrightarrow V^G.$$

Nous avons vu que $\operatorname{tr}\pi_{V^G} = \dim V^G$.

$$\operatorname{Hom}_G(V,W) = \{\phi \in \operatorname{Hom}(V,W) \mid \rho_{Hom(V,W)}(g)\,\phi = \rho_W(g)\circ\phi\circ\rho_V(g^{-1}) = \phi \quad \forall g\in G\}$$

c.à.d. $\rho_W(g)\circ\phi = \phi\circ\rho_V(g) \longleftrightarrow \phi$ est un entrelacement.

$$\Rightarrow \boxed{\dim \operatorname{Hom}_G(V,W) = \left\{\begin{matrix}\#\ \text{entrelacement}\\ \text{lin indép}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)}\,\chi_W(g)}$$

Or, d'après Schur (1), si (ρ_V, V) et (ρ_W, W) sont des irreps., alors $\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1^* \text{ si } (\rho_V, V) \cong (\rho_W, W) \\ 0 \text{ si } \not\cong \end{cases}$

---

* si $(\rho_V, V) = (\rho_W, W)$, alors $\phi = \lambda \, \mathrm{id}_V$.

si $(\rho_V, V) \cong (\rho_W, W)$ mais $(\rho_V, V) \neq (\rho_W, V)$, alors, $\exists\, S$ tel que $\rho_W = S \rho_V S^{-1}$. S est unique (à échelle près). Dém.: Posons $S' \neq S$ avec $\rho_W = S' \rho_V S'^{-1} = S \rho_V S^{-1}$. Alors, $\rho_V = S'^{-1} S \rho_V S^{-1} S'$

$= (S'^{-1}S) \rho_V (S'^{-1}S)^{-1}$

tel que $S'^{-1} S \neq \lambda \, \mathrm{id}$ $\longrightarrow$ $\times$ par Schur (2).

$\Rightarrow$ Thm.: Soient (ρ_V, V) et (ρ_W, W) deux irreps.

Alors $(\chi_V, \chi_W) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow (\rho_V, V) \cong (\rho_W, W) \\ 0 \Leftrightarrow \not\cong \end{cases}$

Soit (ρ_i, V^i) un système complet d'irrep. de G. Alors, si (ρ_V, V) admet une décompos. $V = \bigoplus_i V^{i \oplus n_i}$,

$\boxed{n_i = (\chi_{V^i}, \chi_V)}$ car $\chi_V = \sum_i n_i \chi_{V_i}$

Conséquences

Cy.: Soit V une représentation. Alors $(\chi_V, \chi_V) = 1 \Leftrightarrow V$ est irréd.

Dém.: Posons $V = \bigoplus_i V_i^{\oplus r_i}$ où les $\{V_i\}$ sont un système complet d'irreps. Alors $(\chi_V, \chi_V) = \sum_i r_i^2$. Cela ne peut être égal à une que si $r_i = 1$ pour un seul i, et zéro pour le reste. $\square$

Corr.: La multiplicité r_i de V_i dans V est donnée par

$$r_i = (\chi_{V_i}, \chi_V)$$

La regulière

Pour G un gp fini avec $|G| = \{e, g_1, \dots, g_{|G|-1}\}$, definissons l'espace vectoriel $V_R \equiv \mathbb{C}^{|G|}$ avec base orthonormée $\{e_{g_i}\}$ pour $i = 0, \dots, |G|-1$

Def.: La représentation regulière de G a V_R comme espace vectoriel, avec l'action ρ_R du groupe telle que

$$\rho_R(h)\, e_g = e_{hg} \quad \forall\, h, g \in G.$$

Prop.: $\chi_R(g) = \begin{cases} 0, & g \neq e \\ |G|, & g = e \end{cases}$

X

Thm. : La représentation regulière R admet la décomposition suivante $V_R = \bigoplus_i V_i^{\oplus \dim V_i}$ où i est sommé sur toutes les irrep.

Dém. : $(\chi_{V_i}, \chi_R) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_{V_i}(g)\, \chi_R(g) = \frac{1}{|G|} \bar{\chi}_{V_i}(e)\, \chi_R(e)$

$= \frac{1}{|G|} (\dim V_i)(|G|) = \dim V_i$

$\square$

Thm. (Burnside) : Soit $\{V_i\}$ un système complet d'irrep..
Alors, $\sum_i (\dim V_i)^2 = |G|$

Dém. : $\chi_R(g) = \sum_i (\dim V_i)\, \chi_{V_i}(g) \quad \forall g \in B$.

Donc, $\chi_R(e) = |G| = \sum_i (\dim V_i)\, \chi_{V_i}(e) = \sum_i (\dim V_i)^2$

$\square$

Prop. : $\sum_i (\dim V_i)\, \chi_{V_i}(g) = 0 \quad \forall g \neq e$.

Rappel : $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g) \quad \forall g$. Donc $\chi_V(g)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de g, $[g]$. i.e. $\chi_V \in \mathbb{C}_{class}(G)$

E.g. : $G = S^3$. Nous avons vu 4 repr. :

1) $V_3 = \mathbb{C}^3$; $\rho_{\mathbb{C}^3}(e) = \mathbb{1}_3$, $\rho_{\mathbb{C}^3}((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $\rho_{\mathbb{C}^3}((123)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $V_1 = \mathbb{C}$, $\rho_{V_1}(e) = 1$, $\rho_{V_1}((12)) = 1$, $\rho_{V_1}((123)) = 1$

3) $V_{alt} = \mathbb{C}$, $\rho_{V_{alt}}(e) = 1$, $\rho_{V_{alt}}((12)) = -1$, $\rho_{V_{alt}}((123)) = 1$

4) $V_{std} = V_2 = \mathbb{C}^3$, $\rho_{V_2}(e) = \mathbb{1}_2$, $\rho_{V_2}((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\rho_{V_2}((123)) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$

Tableaux de charactères:

	1 $[e]$	3 $[(12)]$	2 $[(123)]$
$\chi_{\mathbb{C}^3}$	3	1	0
χ_{V_1}	1	1	1
$\chi_{V_{alt}}$	1	-1	1
χ_{V_2}	2	0	-1

$(\chi_{\mathbb{C}^3}, \chi_{\mathbb{C}^3}) = \frac{1}{6}(3^2 + 3\cdot 1^2 + 0) = 2 \neq 1$

$(\chi_{V_1}, \chi_{V_1}) = \frac{1}{6}(1 + 3\cdot 1 + 2\cdot 1) = 1$

$(\chi_{V_2}, \chi_{V_2}) = \frac{1}{6}(\quad " \quad) = 1$

$(\chi_{V_2}, \chi_{V_2}) = \frac{1}{6}(4 + 0 + 2(-1)^2) = 1$

$(\dim V_1)^2 + (\dim V_{alt})^2 + (\dim V_2)^2 = 1 + 1 + 4 = 6 = |G|$ ✓

$\chi_R = (6, 0, 0) = 1\times(1,1,1) + 1\times(1,-1,1) + 2\times(2,0,-1)$

$(\rho_R, \mathbb{C}^6) \cong (\rho_{V_1}, \mathbb{C}) \oplus (\rho_{V_{alt}}, \mathbb{C}) \oplus (\rho_{V_2}, \mathbb{C}^2) \oplus (\rho_{V_2}, \mathbb{C}^2)$

Projecteurs (suite)

Déf. :

Soit (ρ_V, V) une repr. de G et (ρ_{V_i}, V^i) une repr. irréd.

On définit l'opérateur suivant :

$$\Pi_{V_i}^{\ V} = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \bar{\chi}_{V_i}(g)\, \rho_V(g) : V \to V$$

Prop. : Soit $V = \bigoplus_j V^{\oplus r_j}$ la décompo. en irreps.

Alors $\Pi_{V_i}^{\ V} : V \to V_i^{\oplus r_i}$ est un projecteur sur $V_i^{\oplus r_i}$.

Dém. : Prenons d'abord $\Pi_{V_i}^{\ V_j}$ où (ρ_{V_i}, V_i) et (ρ_{V_j}, V_j) sont irréd.

Alors $\Pi_{V_i}^{\ V_j} = \frac{1}{|G|} \sum_j \bar{\chi}_{V_i}(g)\, \rho_{V_j}(g) : V_j \to V_j$

on a que $\Pi_{V_i}^{\ V_j} = \lambda\, id_{V_j}$ (Schur (1)). $\Rightarrow$

$$\lambda = \frac{tr(\Pi_{V_i}^{\ V_j})}{\dim(V_j)} = (\chi_{V_i}, \chi_{V_j}) = \delta_{ij} \Rightarrow \boxed{\Pi_{V_i}^{\ V_j} = \delta_{ij}\, id_{V_j}}$$

Alors, pour V, on a $\Pi_{V_i}^{\ V} = \bigoplus_j \left(\Pi_{V_i}^{\ V_j}\right)^{\oplus r_j} = \bigoplus_j \left(\delta_{ij}\, id_{V_j}\right)^{\oplus r_j}$ $\square$

E.g. : $G = S_3$; $\Pi_{V_2}^{\ \mathbb{C}^3} = \frac{1}{6}\left(2 \cdot \mathbb{1}_3 + (-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \ker \Pi_{V_2}^{\ \mathbb{C}^3} \cong \mathbb{C} = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \checkmark.$$

$\mathbb{C}_{class}(G) = \{\text{charactères}\}$

$\mathbb{C}_{class}(G) = \{ f : G \to \mathbb{C} \mid f(hgh^{-1}) = f(g) \ \forall h \in G \}$.

Si (ρ, V) est une repr de G, alors $\chi_{\rho_V} \in \mathbb{C}_{class}(G)$.

On définit un produit scalaire Hermitien sur $\mathbb{C}_{class}(G)$:

$$(f, \phi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \phi(g).$$

Alors, pour $\{(\rho_i, V_i)\}$ un système complet d'irreps., les χ_{V_i} sont orthogonaux. Mais forment-ils une base complète pour $\mathbb{C}_{class}(G)$?

<u>Lemme</u> : Soit $\alpha \in \mathbb{C}_{class}(G)$ tel que $(\alpha, \chi_\rho) = 0 \ \forall (\rho, V)$ de G. Alors, $\alpha = 0$.

<u>Dém.</u> : ~~De~~ Pour chaque irrep. (ρ_i, V_i) ; $\Pi_{\alpha, V_i} = \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\alpha(g)} \rho_{V_i}(g)$

$\Pi_{\alpha, V_i} \in \mathrm{End}_G(V_i)$. Donc $\Pi_{\alpha, V_i} = \lambda_i \, id_{V_i}$ avec $\lambda_i = \frac{tr(\,)}{\dim V_i} = (\alpha, \chi_{V_i})$

$\Rightarrow \Pi_{\alpha, V_i} = 0 \ \forall (\rho_i, V_i)$. $\Rightarrow \Pi_{\alpha, V} = 0 \ \forall (\rho, V)$.

Prenons la repr. regulière (ρ_R, R) et agissons sur v_e,

$\Pi_{\alpha, R}(v_e) = \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\alpha}(g) v_g = 0$. Or, les $\{v_g\}$ sont lin. ind

$\Rightarrow \alpha(g) = 0 \ \forall g \in G$. $\square$

<u>Thm.</u> : ~~L~~es χ fournissent une base complète de $\mathbb{C}_{class}(G)$.

$\{\chi\} \rightleftarrows \{\text{conj.}\}$

La régulière (bis)

On avait défini (ρ_R, R), $R = \mathbb{C}^{|G|} = \{e_{g_i}\}$, et $\rho_R(g)\, e_{g_i} = e_{gg_i}$

Soit $\mathbb{C}(G) \equiv \{ f : G \to \mathbb{C} \}$. Prenons une base canonique de fonctions $\{e_{g_i}\}$, où $e_{g_i}(g_j) = \delta_{ij}$. Alors, $\forall f \in \mathbb{C}(G)$, on a la décomposition

$$f = \sum_{g \in G} f(g)\, e_g \,.$$

On peut alors donner une deuxième déf. de la régulière :

__Déf. 2__ : $R \equiv \mathbb{C}(G)$, et $\rho_R(g)(f) \equiv f \circ g^{-1}$ $\forall f \in \mathbb{C}(G)$.

Pour voir que les deux déf. sont équivalentes, on note que

$$\rho_R(g) \cdot f = f \circ g^{-1} = \sum_{g'} f(g^{-1}g')\, e_{g'} = \sum_{g''} f(g'')\, e_{gg''}$$

donc $\rho_R(g)\, e_{g'} = e_{gg'}$.

À quoi nous sert cette nouvelle déf. plus abstraite ?
Réponse : Structure multiplicative de $\mathbb{C}(G)$, si f_1 et $f_2 \in \mathbb{C}(G)$

alors $f_1 + f_2 \in \mathbb{C}(G)$, et $f_1 * f_2 \in \mathbb{C}(G)$, où $f_1 * f_2 = \sum_{g_1, g_2} f_1(g_1 g_2^{-1}) f_2(g_2)\, e_{g_1}$

$\mathbb{C}(G)$ est un anneau.

$$f_1 * f_2 = \sum_{g_1, g_2} f_1(g_1 g_2^{-1}) f_2(g_2)\, e_{g_1} = \sum_{g_1', g_2} f_1(g_1') f_2(g_2)\, e_{g_1' g_2}$$

donc, $e_g e_k = e_{gk}$.

$\mathbb{C}(G)$ "anneau de groupe" $:= \{ \sum_g c_g e_g \}$ avec $e_g e_k = e_{gk}$

Anneaux

Déf.: Un anneaux $(R, +, \cdot)$ est un ensemble R muni de deux opérations $+ : R \times R \to R$ et $\cdot : R \times R \to R$ tel que :

1) $(R,+)$ est un groupe Abélien, avec identité notée "0".

2) $(R, \cdot)$ est un "monoïde" : - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

   - $\exists$ "1" $\in R$ tel que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \ \forall a \in R$.

3) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

   $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$.

Remarque : Si $0 = 1$, alors R n'a qu'un élément.

E.g. : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ $\leftarrow$ corps (anneaux commutatifs où $\forall x \neq 0$, $\exists x^{-1} \in R$).

$\mathbb{C}[x] = \{$polynômes en x avec coeffs. en $\mathbb{C}\}$.

$\mathbb{C}(S_3)$. E.g. : $(a e_e + b e_{(12)} + c e_{(13)}) \cdot (e_{(13)}) = a e_{(13)} + b e_{(321)} + c e_e$

$0 \in \mathbb{C}(G)$, $1 = e_e$.

Modules

Modules

Soit R un anneau. Un R-module M de gauche est un ensemble M muni d'une opération $+ : \cancel{R\times R}\ M\times M \to M$ et d'une action $\cdot : R\times M \to M$ tel que :

1) $(M,+)$ est un gp. Abélien

2) $\forall r,s \in R,\ x,y \in M$

2) $((r +_R s), x) = (r,x) +_R (s,x)$ $\quad ((r+s)\cdot x = r\cdot x + s\cdot x)$

3) $(r, x +_M y) = (r,x) +_R (r,y)$ $\quad (r\cdot(x+y) = r\cdot x + r\cdot y)$

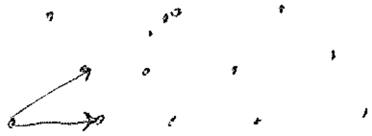
4) $(r \cdot_R s, x) = (r,(s,x))$ $\quad ((r\cdot s)\cdot x = r\cdot(s\cdot x))$

5) $(1_R, x) = x$

E.g. : - Tout espace vectoriel

- $R = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$; $M = \mathbb{C}^n$

- un réseau



Prop. : Les représentations d'un gp. correspondent à des $\mathbb{C}[G]$-modu

Lemme : Toute repr. $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ s'étend par linéarité à un application $\bar\rho : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$ où

$$\bar\rho\left(\sum_i c_i g_i\right)(v) = \sum_i c_i \bar\rho(g_i)(v).$$

Toute applic. $\bar\rho : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$ se restreint à un $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$
G-homom

(Optional) Prop. : $\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_i \mathrm{End}(V_i)$ pour $\{V_i\}$ un S.C.R.I. (IV)

Pour une repr. (ρ_V, V) on definit
$$\varphi_V : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$$
$$\sum_i c_i g_i \longmapsto \sum_i c_i \rho_V(g_i).$$

On choisi donc $\bigoplus (\rho_V, V) = \bigoplus_i (\rho_{V_i}, V_i)$ et φ tel que

$$\cancel{\varphi\left(\sum_j c_j g_j\right) = \bigoplus \sum_j c_j \, \rho_{V_i}(g_j)}$$

$$\varphi\left(\sum_a c_a g_a\right) = \sum_a c_a \bigoplus_i \rho_{V_i}(g_a) = \sum_a c_a \begin{pmatrix} \rho_{V_1}(g_a) & & \\ & \rho_{V_2}(g_a) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Alors, $\varphi(e) = \bigoplus_i \mathrm{id}_{V_i} \Rightarrow \varphi \neq 0$.

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] = |G| \qquad \dim_{\mathbb{C}}\left(\bigoplus \mathrm{End}(V_i)\right) = \sum_i (\dim V_i)^2 \underset{\text{Burnside}}{=} |G|.$$

$\square$

Produits tensoriels

Soient M_R un R-module de droite et ${}_RN$ un R-mod de gauche.

Déf. : $M_R \underset{R}{\otimes} {}_RN = \{ (m, n) \mid m \in M_R,\ n \in {}_RN \} \big/ \text{rels.}$

rels. : 1) $(m_1 + m_2, n) = (m_1, n) + (m_2, n)$

2) $(m, n_1 + n_2) = (m, n_1) + (m, n_2)$

3) $(m \cdot r, n) = (m, r \cdot n)$.

$M \underset{R}{\otimes} N$ est un gp. Abélien.

Déf. : Soit ${}_SM_R$ ~~ou~~ un $(S\text{-}R)$-bimodule, et ${}_RN$ un R-module à gauche.

On définit ${}_SM_R \underset{R}{\otimes} {}_RN = \{ (m, n) \mid m \in M,\ n \in N \}$ comme avant.

Prop. : $M \otimes N$ est un S-module à gauche ~~à travers~~ avec l'action de S $\quad s \cdot (m, n) = (s \cdot m, n)$.

~~Repr. induite~~

~~Soit $H \subset G$ un sous-gp de G, et (ρ_H, V_H) une repr. de H.~~

~~Alors V_H est un $\mathbb{C}[H]$-module à gauche.~~

~~$\mathbb{C}[G]$ est un bimodule sur lui-même, et $\mathbb{C}[H]$ est~~

La représentation induite

(VI)

Soit $H \subset G$ un sous-gp. de G, et (ρ_H, V_H) une H-repr.
Alors, on a les propriétés suivantes :

1) V_H est un $\mathbb{C}[H]$-module à gauche
2) $\mathbb{C}[G]$ est un $(\mathbb{C}[G]-\mathbb{C}[G])$-bimodule
3) $\Rightarrow$ $\mathbb{C}[G]$ est aussi un $(\mathbb{C}[G]-\mathbb{C}[H])$-bimodule

On peut donc définir le $\mathbb{C}[G]$-module à gauche suivant :

Déf. : On définit $\mathbb{C}[G] \underset{\mathbb{C}[H]}{\otimes} V_H \equiv \mathrm{Ind}_H^G V_H$

~~Prop.~~ :

Prop. : $\mathrm{Ind}_H^G V_H$ est un $\mathbb{C}[G]$-module à gauche. Donc, il est une repr. de G. On l'appelle "représentation induite".

$$\mathbb{C}[G] \underset{\mathbb{C}[H]}{\otimes} V_H = \{ (g \otimes w \mid g \in G, w \in V_H \} / \text{rel})$$

rel : 1) $(g_1 + g_2) \otimes w = g_1 \otimes w + g_2 \otimes w$ 2) $g \otimes (w_1 + w_2) = g \otimes w_1 + g \otimes w_2$

3) $(gh) \otimes w = g \otimes (\underset{V_H}{\rho(h)} \cdot w) \quad \forall h \in H$.

L'action de $\mathbb{C}[G]$ à gauche est donnée par :

$$\underset{\mathrm{Ind}}{\rho}(g_1)(g_2 \otimes w) = (g_1 g_2) \otimes w .$$

La repr. induite

Soit $H \subset G$ deux gps, et (ρ_H, V_H) un rep. de H.

Choisons des représentants de $G/H = \{g_1, \dots, g_k\}$.

On définit l'espace vectoriel $V = \bigoplus_{g_i \in G/H} V^{g_i}$ où chaque $V^{g_i} \cong V_H$.

Alors, chaque $v \in V$ admet une décomposition unique

$v = \sum_{g_i} g_i v_i$ où $v_i \in V$ et $g_i v_i$ est l'image de v_i en V^{g_i} sous l'isomorphisme "g_i" $: V \to V^{g_i}$.

Alors, $\forall g \in G$, $\exists\, g_{j(i)} \in G/H$ et un h tels que $g \cdot g_i = g_{j(i)} \cdot h$. On définit alors $\rho_{Ind}(g) \cdot (g_i v_i) \equiv g_{j(i)} \cdot \left(\rho_{V_H}(h) v_i\right)$

<u>E.g.</u>: $S_3 = \{e, \tau = (12), \tau\sigma = (23), \tau\sigma^2 = (13), \sigma = (123), \sigma^2 = (321)\}$

$H = \mathbb{Z}_3 = \{e, \sigma, \sigma^2\}$ $\quad (\rho_H, V_H) = \{v\}$ w/ $\rho_H(\sigma^n) = \lambda_3^n$

$V = V_e \oplus V_\tau$
$\quad\ \langle v \rangle \ \ \langle \tau v \rangle$ $\quad \rho_{Ind\,H}(\sigma) \cdot v = \lambda v$ $\quad$ ~~$\rho_J(\sigma)(\tau v) = \rho_J(\tau)(\sigma v)$~~

$\rho_J(\sigma) \cdot (\tau v) = ?$ $\quad \sigma\tau = \tau\sigma^2 \Rightarrow \rho_J(\sigma)(\tau v) = \tau\left(\rho_H(\sigma^2) v\right) = \lambda_3^2 (\tau v)$

$\Rightarrow \rho_J(\sigma) = \begin{pmatrix} \lambda_3 & \\ & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$

E.g. : $G = S_3$, $H = \mathbb{Z}_3 = \{e, \sigma = (123), \sigma^2 = (321)\}$

Prenons la repr. de H défini par $\rho : \sigma^n \to \lambda_3^n$ où $\lambda_3^3 = 1$.

Donc $V_H = \mathbb{C} = \{\omega\}$.

Écrivons les éléments de G ainsi :

$\{e, \tau = (12) ; \tau\sigma = (23), \tau\sigma^2 = (13), \sigma = (123), \sigma^2 = (321)\}$.

Alors, pour définir une base pour $\mathrm{Ind}\, V_H = \mathbb{C}[S_3] \otimes_{\mathbb{C}[H]} V_H$,

On commence par l'inventaire des $g \otimes \omega$

$v_1 \equiv e \otimes \omega$, $v_2 \equiv \tau \otimes \omega$, $v_3 \equiv (\tau\sigma) \otimes \omega$

or $(\tau\sigma) \otimes \omega = \tau \otimes (\rho_{V_H}(\sigma) \cdot \omega)$ car $\sigma \in H \Rightarrow v_3 = \lambda_3 v_2$

$v_4 \equiv (\tau\sigma^2) \otimes \omega = \lambda_3^2 v_2$, $v_5 \equiv \sigma \otimes (\omega) = \lambda_3 v_1$, $v_6 \equiv \sigma^2 \otimes \omega = \lambda_3^2 v_1$.

$\Rightarrow \mathrm{Ind}_H V_H \simeq \mathbb{C}^2 \langle v_1, v_2 \rangle$, avec l'action

$\rho_{\mathrm{Ind}}(\tau) \cdot v_1 \equiv \tau (e \otimes \omega) = \tau \otimes \omega = v_2$

$\rho_{\mathrm{Ind}}(\tau) \cdot v_2 \equiv \tau \cdot (\tau \otimes \omega) = e \otimes \omega = v_1 \quad \Rightarrow \rho_{\mathrm{Ind}}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\rho_{\mathrm{Ind}}(\sigma) \cdot v_1 \equiv \sigma \cdot (e \otimes \omega) = \sigma \otimes \omega = e \otimes (\rho_H(\sigma) \cdot \omega) = e \otimes (\lambda_3 \omega) = \lambda_3 v_1$

$\rho_{\mathrm{Ind}}(\sigma) \cdot v_2 = \dots = \lambda_3^2 v_2$

$\Rightarrow \rho_{\mathrm{Ind}}(\sigma) = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Ind}_{\mathbb{Z}_3}^{S_3}(V_H) \cong V_2}$$

Prop. : Soit W une repr. de $H \subseteq G$, et U une rep de G. Posons $V = \mathrm{Ind}\, W$. Alors, tout homom. $\varphi : W \to U$ de H-modules s'étend uniquement à un homom. de G-mod., i.e.

$$\mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}\, U) = \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}(W), U).$$

$g \otimes w$ $\forall \varphi : W \to \mathrm{Res}\, U$, on définit

$$\tilde{\varphi} : g \otimes w \longmapsto g \otimes \varphi(w)$$

$$\mathrm{Hom}_G(V, U) = \mathrm{Hom}_G\left(\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W, U\right) = \mathrm{Hom}_{G \times H}(\mathbb{C}[G] \otimes W, U) = \mathrm{Hom}_H(W, U)$$

Prop. : $\cancel{\mathrm{Ind}_{H_1}^{H_2}\left(\mathrm{Ind}_{H_3}^{H_2}(V)\right)}$ $\mathrm{Ind}_{H_2}^{G}\left(\mathrm{Ind}_{H_1}^{H_2}(V)\right) \cong \mathrm{Ind}_{H_1}^{G}(V)$.

Les partitions

Déf.: Soit $n \in \mathbb{N}$. Une portion $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ avec $k \leq n$ est un ensemble de nombres naturels λ_i tels que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$.

On organise ces entiers en des vecteurs par ordre décroissant.

E.g. : $n = 5$, $(3,2,1)$, $(2,2,1)$, $(2,1,1,1)$ etc.

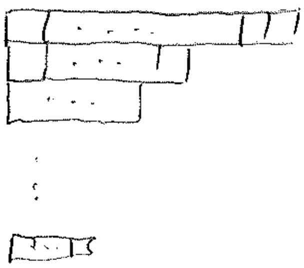
Déf.: Un diagramme de Young (ou diagramme de Ferrers), associé à une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ consiste en n cases organisées ainsi :

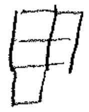
λ_1 cases

λ_2 cases

λ_3

λ_k

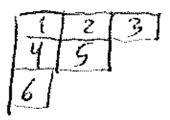


E.g. : $(3\ 2\ 1) \leftrightarrow$  ; $(2,2,1) \leftrightarrow$ ,

$(2,1,1,1) \leftrightarrow$ 

Déf.: Un un tableau~~x~~ de Young est un diagramme de Young où les cases sont numérotées.

On s'intéressera à la numérotation canonique, e.g.



Pour un tableau canonique, T, on définit l'action de S_n sur le tableau comme étant l'action qui permute les numéros :

E.g. : $(12) \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\qquad (123) \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$

Alors, on définit le sous-groupe $L(T) \subseteq S_n$

Def. : $L(T) = \{ g \in S_n \mid g \cdot T$ préserve les lignes de $T \}$

E.g. : $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\begin{array}{l} \leftarrow S_3 \\ \leftarrow S_2 \\ \leftarrow S_1 \end{array}$ $\qquad L(T) = S_3 \times S_2 \times S_1 \subset S_6$

De même, on définit $C(T) = \{ g \in S_n \mid g$ préserve les colonnes de $T \}$

donc, pour $T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2} & \\ \cline{1-2}\end{array}$ $\qquad L(T) = S_3 \times S_2 \times S_2$

$C(T) = S_3 \times S_3 \times S_1$

Rappel : Soit G un groupe fini. L' "algèbre du groupe" $\mathbb{C}[G]$ est l'anneau de "combinaisons linéaires sur $\mathbb{C}$ d'élément de G", avec le produit du groupe.

E.g. : $G = S_3$, $\quad (e + (12) + 5(123)) \cdot (2(23))$

$= 2(23) + 2(123) + 10 \cdot (12$

Pour un tableau T associé à une partition λ de n, prenons l'anneaus $\mathbb{C}[S_n]$. On définit alors deux éléments

$$a_\lambda \equiv \sum_{g \in L(T)} g \quad ; \quad b_\lambda \equiv \sum_{g \in C(T)} \cancel{}\, sgn(g) g \quad \text{et finalement}$$

$c_\lambda \equiv a_\lambda \cdot b_\lambda \in \mathbb{C}[S_n]$. c_λ est le "symétriseurs de Young".

E.g. : $G = S_3$, $T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\quad L(T) = \underset{\{(12)\}}{S_2} \times S_1$

$C(T) = \underset{\{(13)\}}{S_2} \times S_1$

$\underset{a_{(2,1)}}{a_\lambda} = e + (12)$; $b_{(2,1)} = e - (13)$

$\boxed{c_{(2,1)}} = (e + (12))(e - (13)) = \boxed{e + (12) - (13) - (321)}$

~~Thm.~~ Def. : Soit $\mathbb{C}[S_n]$ l'algèbre de groupe de S_n et $c_\lambda \in \mathbb{C}[S_n]$ un symétriseur de Young. On définit le module à gauche $V_\lambda \equiv (\mathbb{C}[S_n]) \cdot c_\lambda$.

Thm. : V_λ est un repr. irréd. de S_n. Toute repr. irréd. peut s'écrire comme un tel V_λ.

E.g. : 1) $T = \boxed{1 \mid \cdots \mid n}$ $\qquad a = \sum_{g \in G} g \; ; \quad b = e$

$$L(T) = S_n \,, \quad C(T) = e \,.$$

$\Rightarrow ab = a \qquad V_\lambda \equiv \mathbb{C}[S_n]\cdot a$. Prenons comme premier générateur $v_1 \equiv \underset{= a}{e\cdot a} \in V_\lambda$. $\quad \forall g \in S_n,\; g\cdot v_1 = g \sum_{g'} g' = \sum_{g''} g'' = v_1$

$\Rightarrow V_\lambda \cong \mathbb{C}$ avec représentation triviale.

2) $T = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}$ $\qquad a = e \leftrightarrow L(T) = e$

$$b = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, g \quad \text{car} \quad C(T) = S_n \,.$$

$\Rightarrow c \equiv ab = b$

Prenons encore $v_1 \equiv e\cdot b \in V_\lambda$. Alors, $\forall g \in S_n$

$$g\cdot v_1 = g \sum_{g' \in S_n} \operatorname{sgn}(g')\, g' = \operatorname{sgn}(g) \sum_{g'} \operatorname{sgn}(gg')(gg') = \operatorname{sgn}(g)\, v_1$$

$\Rightarrow V_\lambda \cong \mathbb{C}$ avec repr. alternante.

3) $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}$ $\qquad c = e + (12) - (13) - (321)$

Prenons $v_1 \equiv c$; $v_2 \equiv (13) v_1 = (13) + (123) - e - (23)$

On note que $(12) v_1 = v_1$, $\quad (12) v_2 = -v_1 - v_2$

3) $G = S_3$, $T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1} \end{array}$; $a = e + (13)$, $b = e - (12)$

$c = e + (13) - (12) - (123)$

$V_\lambda = \mathbb{C}[S_3] \cdot c$

Prenons $v_1 = c$. On note que $(13) v_1 = v_1$.

$(12) \cdot v_1 = (12) + (321) - e - (23) \neq v_1 \quad \Rightarrow \quad (12) \cdot v_1 = v_2$.

$(123) v_1 = (123) + (23) - (13) - (321) = -v_1 - v_2$

$(123) v_2 = v_1 \qquad \Rightarrow \quad V_\lambda = \langle v_1, v_2 \rangle$

$\rho((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\rho((123)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbb{1}\lambda - \rho(123)| = (\lambda + 1)\lambda + 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_\pm = \zeta_3, \zeta_3^2$ ✓.

$V_\lambda = V_{std}$.

En général ; $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & \cdots & & \\ \hline & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \leftrightarrow V_{std}$.

$2^{\text{ème}}$ construction de V_λ

On fixe un tableau T. On définit le polynome $F_T = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$ où i et j sont dans la même colonne du tableau.

L'ensemble de $F_T \leftrightarrow V_\lambda$.

E.g. : $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \; & \; & \; \\ \hline \end{array} \leftrightarrow F_T = 1$

$T = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow F_T = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$

$T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1} \end{array}$ $\quad v_1 = F_T = (x_1 - x_3) \qquad v_2 = (12) v_1 = (x_2 - x_3)$

$(123) v_1 = -v_1 + v_2 \qquad (123) v_2 = (x_3 - x_1) = -v_1$

$= (x_2 - x_1)$

$\lambda_{\rho(123)\pm} = \zeta_3, \zeta_3^2$ ✓

Formule de $\dim(V_\lambda)$

Pour tout diagramme, on définit un crochet par rapport à un case x comme étant l'ensemble de cases à droite de x sur la même ligne, en dessous de x dans la m̂ colonne, et x inclus.

Alors $$\dim(V_\lambda) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} \text{longueur}(\text{crochet}_i)}$$

E.g. : $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 2 & 1 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \dim \ \dfrac{3!}{3\cdot 2\cdot 1} = 1$

$\begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \dim = 1$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array} \longrightarrow \dim = \dfrac{3!}{3\cdot 1\cdot 1} = 2$ ✓.

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 & \\ \cline{1-2}\end{array} \longrightarrow \dim = \dfrac{5!}{4\cdot 3\cdot 2} = 5$ ✓.

S_5.

Formule de Fröbenius

Soit C_i la classe de conj. en S_d déterminée par le vecteur ~~partition~~ $i = (i_1, \dots, i_d)$ avec $\sum \alpha i_\alpha = d$

$C_i \to i_1$ 1-cycles, i_2 2-cycles, ..., i_d d-cycles.

Prenons des vars. $x_1, \dots, x_k$ où $k \geq$ # lignes dans λ.

Définissons : $P_j(x) = x_1^j + x_2^j + \dots + x_k^j$ $\quad 1 \leq j \leq d$

et $\Delta(x) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$

Pour toute série formelle $f(x_1, \dots, x_k)$ et tout k-uple d'éléments de $\mathbb{N}^0$,

$[f(x)]_{(i_1, \dots, i_k)} \equiv$ coeff. de $x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}$ en f.

Pour toute partition $\lambda : \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$ de d, définissons

$l_1 = \lambda_1 + k - 1, \; l_2 = \lambda_2 + k - 2, \; \dots, \; l_k = \lambda_k$.

Alors, le charactère de V_λ évalué en $g \in C_i$ est donné par

$$\chi_\lambda(C_i) = \left[\Delta(x) \cdot \prod_j P_j(x)^{i_j}\right]_{(l_1, \dots, l_k)}$$

E.g. : S_3, $\lambda = (2,1)$ $\to$ x_1, x_2 $\quad \Delta = (x_1 - x_2)$ $\quad P_i = x_1^i + x_2^i$

$l = (3,1)$

$[e] = C_{(3,0,0)}$ $\quad [(12)] = [(12)(3)] = C_{(1,1,0)}$; $[(123)] = C_{(0,0,1)}$

$\| $

$(1)(2)(3)$

$\chi_{(2,1)}([e]) = \left[(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^3\right]_{(3,1)} = -1 + 3 = 2 = \dim V_{(2,1)}$ ✓

$\chi_{(2,1)}([(12)]) = \left[(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)\right]_{(3,1)} = -1 + 1 = 0$ ✓

$\chi_{(2,1)}([(123)]) = \left[(x_1 - x_2)(x_1^3 + x_2^3)\right]_{(3,1)} = -1 \quad \Rightarrow \quad (2 \;\; 0 \;\; -1)$ ✓

Dualité Schur-Weyl

Motivation : $V \otimes V \cong \mathrm{Sym}^2 V \oplus \Lambda^2 V$

On a une action à gauche de $GL(V)$, et une à droite de S_2. Sur $V\otimes V$, $GL(V)$ agit comme $v \otimes v \mapsto (g\cdot v)\otimes(g\cdot v)$ c.à.d, par l'image de l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(V) &\to \mathrm{End}(V^{\otimes d}) \\ g &\longmapsto g\otimes\cdots\otimes g \end{aligned}$$

A droite on a $(v_1\otimes\cdots\otimes v_d)\cdot\sigma = v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(d)}$

On définit les foncteurs de Schur $\mathbb{S}_\lambda V = \mathrm{Im}\left(c_\lambda|_{V^{\otimes d}}\right)$

e.g. : $\boxed{1 \cdots d}$, $V \rightsquigarrow \mathrm{Sym}^d V$

$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \vdots \\ d \\ \hline \end{array}$, $V \rightsquigarrow \Lambda^d V$

$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}$, $V \rightsquigarrow v_1\otimes v_2\otimes v_3 + v_2\otimes v_1\otimes v_3 - v_3\otimes v_2\otimes v_1 - v_3\otimes v_1\otimes v_2$.

On peut aussi écrire : $\mathbb{S}_\lambda V = V^{\otimes d} \otimes_A V_\lambda$ où $A = \mathbb{C}[S_n]$ et $V_\lambda = A\cdot c_\lambda$

La dualité Schur-Weyl : $V^{\otimes d} = \bigoplus_\lambda \mathbb{S}_\lambda S \otimes_\sigma V_\lambda$

$$\simeq \bigoplus_\lambda \left(\mathbb{S}_\lambda S\right)^{\oplus \dim(V_\lambda)}$$

E.g. : $V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}^3 V \oplus \Lambda^3 V \oplus \left(\mathbb{S}_{(2,1)} V\right)^{\oplus 2}$

Littlewood-Richardson

<u>Prélim.</u> : dim $S_\lambda V = \prod_{\text{cases}} \frac{(k-i+j)}{h_{ij}}$ où (i,j) = coord. de la case

h = hook lgth.

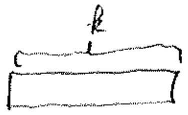
k = dim V

<u>E.g.</u> : SL_2 $\square \to$ dim $V = 2 \leftrightarrow$ spin $\frac{1}{2}$

dim$(V) = 2$

$\square\square$, $\prod(k-i+j)$ $\boxed{2\,|\,3} = 2\cdot 3$, $\prod h_{ij}$ $\boxed{2\,|\,1} = 2$

dim $= 3 \leftrightarrow$ spin 1



$\to \boxed{2\ 3\ \cdots\ k+1}$, $\boxed{k\ \ k-1\ \cdots\ 1}$

$(k+1)!$ $\qquad$ $k\,!$

dim $= k+1 = 2j+1 \Rightarrow$ spin $j = \frac{k}{2}$

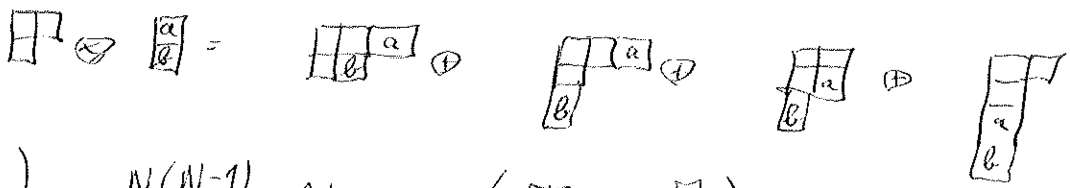
<u>L-R</u>

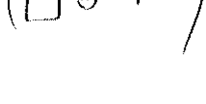
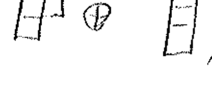
1) On étiquette le $2^{\text{è}}$ diag. en mettant des a dans les cases de la $1^{\text{ère}}$ ligne, b ds la $2^{\text{è}}$, etc...

2) On "colle" les cases a au 1^{er} diag. de façon à former un diag. "admissible" de Young, mais jamais plus d'un "a" par colonne

3) On colle les b suivant la règle suivante : en lisant en "Arabe", $\# b \leq \# a$ à chaque instant.

<u>E.g.</u> :



dim() $= \frac{N(N-1)}{2} \times N$ = dim() $= \frac{N(N^2-1)}{3} + \frac{N(N-1)(N-2)}{6}$ ✓

Groupes : notions de base

<u>Définition</u> : Un groupe est un ensemble G doté d'une application "produit/multiplication" $\cdot : G \times G \to G$ satisfaisant trois axiomes :

1) Associativité : Soient $g_1, g_2, g_3 \in G$, alors

$(g_1, (g_2, g_3)) = ((g_1, g_2), g_3)$ c.à.d. $g_1(g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$

2) Existence d'un élément neutre "e" tel que

$g \cdot e = e \cdot g = g \quad \forall g \in G$

3) Existence d'un élément inverse g^{-1} pour tout $g \in G$ tel que

$g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$

<u>Remarques</u> : 1) Le neutre est unique :

<u>Dém.</u> : Soient e_1 et e_2 deux éléments neutres. Alors,

$g \cdot e_1 = g \cdot e_2 = g \quad \forall g \in G$. ~~Donc~~ Or $g^{-1} \cdot (g \cdot e_1) = g^{-1} \cdot (g \cdot e_2)$

$\Rightarrow \cancel{e_1}\ (g^{-1} g) \cdot e_1 = (g^{-1} g) \cdot e_2 \Rightarrow e_1 = e_2$

$\square$

2) Pour tout $g \in G$, g^{-1} est unique :

<u>Dém.</u> : $g \cdot b = g \cdot a = e \Rightarrow b = a$

$\square$

<u>Def.</u> : Un groupe G est Abélien si $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 \quad \forall g_1, g_2$

Exemples

1) $\mathbb{R}$? $(\mathbb{R}, \cdot)$ n'est pas un groupe car 0 n'a pas d'invers

$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe

2) $\mathbb{Z}$? $(\mathbb{Z}, \cdot)$ pas un gp. car $n^{-1} \notin \mathbb{Z}$ pour $n \neq 1$.

$(\mathbb{Z}, +)$ est un gp.

3) $\cancel{\mathbb{Q}}$ $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ est un groupe, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ aussi., $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ ✓

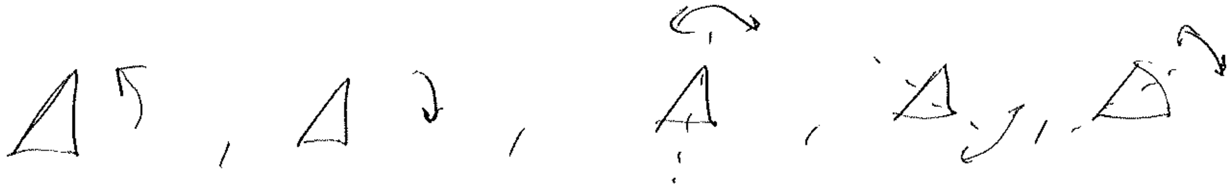
4) $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$ non-Abeliens

e.g.: $\sigma_1 \sigma_2 = i\sigma_3$, $\sigma_2 \sigma_1 = -i\sigma_3$

$\mathbb{Z}_n = \{g_1, g_2, \dots, g_n\} = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ with $a^n = e$

S_n = groupe de permutations de n objets

S_3 =



D_n : symmetries d'un n-gon régulier.

~~Table de Cayley~~

Homomorphismes

<u>Déf.</u> : ~~Une~~ Soient G_1 et G_2 deux groupes. Un homomorphisme ϕ de G_1 à G_2 est une application sur les ensembles $\phi : G_1 \to G_2$ qui respecte les multiplications. C.à.d.,

~~pour~~ $\forall\ g, h \in G_1$ on a $\phi(g) *_2 \phi(h) = \phi(g *_1 h)$

<u>E.g.</u> : 1) $\det : GL(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$

$$M_{n\times n} \longrightarrow \det(M_{n\times n})$$

$\forall\ M_1, M_2$, on a $\det(M_1M_2) = \det(M_1)\det(M_2)$

2) $(\ )^n : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$

$$z \longmapsto z^n$$

Théorème de Cayley

<u>Déf.</u> : Soit G un groupe et X un ensemble. Une action ϕ de G sur X à gauche est une application

$\phi : G \times X \to X$ telle que :

1) Pour tout g_1 et g_2 et tout $x \in X$, $\phi(g_1, \phi(g_2, x)) = \phi(g_1g_2, x)$
2) $\phi(e, x) = x$ pour tout x

Fixons un élément $g \in G$. Alors l'application

$\phi_g : X \to X \quad x \mapsto (g, x)$ est une bijection

Dém. : 1) ϕ_g est injectif car si $\phi(g, x_1) = \phi(g, x_2)$

alors $\phi(g^{-1}, \phi(g, x_1)) = \phi(g^{-1}, \phi(g, x_2))$ or

$$\qquad \qquad = \phi(e, x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad '' = x_2$$

2) ϕ_g est surjectif car, $\forall x \in X$, on a l'element $y = \phi(g^{-1}, x) \in X$

avec $\phi_g(y) = \phi(gg^{-1} = e, x) = x$

$\blacksquare$

Def. : Pour un ensemble X, on définit le groupe $Sym(X)$

$Sym(X) = \{ f : X \to X \mid f \text{ est une bijection} \}$. Le produit est la composition d'applications $g \cdot f = g \circ f$.

~~Thm. (Cayley) : L'homomorphisme $\alpha : G \to Sym(G)$ tel que $\alpha : g \mapsto \phi_g$ est injectif.~~

~~Démonstration :~~

Thm. (Cayley) : L'application $\alpha : G \to Sym(G)$

$\alpha : g \mapsto \phi_g$ est un homomorphisme injectif.

Dém. : 1) Homomorphisme : Soient $g_1, g_2 \in G$. Alors

$\alpha(g_1 g_2) = \phi_{g_1 g_2}$. Or, $\phi_{g_1 g_2} : x \mapsto \phi(g_1 g_2, x) = \phi(g_1, \phi(g_2, x))$

$$= \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}(x) \quad \forall x \in G$$

Donc $\alpha(g_1 g_2) = \phi_{g_1} \cdot \phi_{g_2}$

G admet une action canonique sur lui-même appellée translation à gauche : $t_L : G \times G \longrightarrow G$

$$(g, h) \longmapsto g \cdot h$$

<u>Thm. (Cayley)</u> : L'application $\lambda : G \longrightarrow \mathrm{Sym}(G)$

$$g \longmapsto t_L(g, -) \equiv g_L$$

est un homomorphisme injectif.

<u>Dém.</u> : 1) Homomorphisme : $\forall g_1, g_2 \in G \quad \lambda(g_1 g_2) = (g_1 g_2)_L$

Or $(g_1 g_2)_L : g \longmapsto (g_1 g_2) g = g_1 \cdot (g_2 \cdot g) = (g_1)_L ((g_2)_L (g))$

$$= (g_1)_L \circ (g_2)_L (g)$$

Donc $\lambda(g_1 g_2) = \lambda(g_1) \circ \lambda(g_2)$

2) Injectif : Soient $g_1, g_2 \in G$. Supposons que $\lambda(g_1) = \lambda(g_2)$.

Alors, $\forall g \in G$ on a $(g_1)_L(g) = g_1 g = (g_2)_L(g) = g_2 g$

Donc $g_1 g g^{-1} = g_2 g g^{-1} \Rightarrow g_1 = g_2$

$\boxtimes$

Donc, tout groupe fini discret est un sous-groupe d'un S_n

Thm. : Soit $\phi : G_1 \to G_2$ is homom. Alors :

ϕ est injectif $\iff$ $\phi^{-1}(e_2) = e_1$ ($\ker\phi = e_1$)

Dém. : "$\Rightarrow$" : Soit $g \overset{\in G_1}{\neq} e_1$ avec $\phi(g) = e_2$. Alors $\phi(g) = \phi(e_1)$.

Donc ϕ ~~inj~~.

"$\Leftarrow$" : Supposons que $\ker\phi = e_1$. Soient $g_1 \neq g_2$ avec $\phi(g_1) = \phi(g_2)$. Alors $\phi(g_1 g_2^{-1}) = \phi(g_1)\cdot\phi(g_2^{-1}) = \phi(g_1)\cdot\phi(g_2)^{-1} = e_2$ avec $g_1 g_2^{-1} \neq e_1$ $\to$ $\times\!\!\times$

Sous-groupes

Déf. : Un sous-groupe H de G est un sous-ensemble $H \leq G$ tel que $h_1 h_2 \in H \quad \forall\, h_1, h_2 \in H$.

E.g. : - $(\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{Q}, +) \subset (\mathbb{R}, +) \subset (\mathbb{C}, +)$

$(\mathbb{Q}^*, \times) \subset (\mathbb{R}^*, \times)$

- $SL(n, \mathbb{C}) = \{ M_n \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det(M_n) = 1 \} \subset GL(n, \mathbb{C})$

e.g. : $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$.

- Pour un homom. $\phi : G_1 \to G_2$, $\ker\phi \equiv \{ g \in G_1 \mid \phi(g) = e_2 \}$

$\boxed{\ker\phi \subset G_1}$ $\Rightarrow$ Cayley : G fini $\leq S_n$ pour un certain n.

$\mathrm{Im}\,\phi \equiv \{ g \in G_2 \mid \exists\, h \in G_1 \text{ avec } \phi(h) = g \}$

$\boxed{\mathrm{Im}\,\phi \subset G_2}$

Cosets : Classe suivant un sous-gp

Soit G un groupe et $H \subseteq G$ un sous-groupe. ~~On appelle~~ et $g \in G$. On appelle "classe à gauche de g suivant H" l'ensemble : $gH \equiv \{ gh \mid h \in H \} \subseteq G$

et "classe à droite ..." $\quad Hg \equiv \{ hg \mid h \in H \} \subseteq G$.

E.g. : $G = (\mathbb{Z}, +)$, alors $H \equiv n\mathbb{Z} \equiv \{ np \mid p \in \mathbb{Z} \}$ est un sous-gp.

On definit donc pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $rH \equiv \{ np + r \mid p \in \mathbb{Z} \}$

Exemple : $H = 2\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots \}$

$1H = \{ \dots, -3, -1, 1, 3, \dots \}$

Remarques : 1) $\forall$ tout $g \in$ appartient à une classe à g. et une à dr. $\quad g \in gH$ étant donné que $e \in H$
$\in Hg$

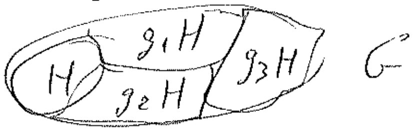
2) Si ~~deux~~ g appartient à deux classes à droite (gauche) $g \in Hg_1$ et $g \in Hg_2$, alors $Hg_1 = Hg_2$.

Dém. : $\exists$ h_1 et h_2 tels que $g = h_1 g_1 = h_2 g_2$. Donc

$g_1 = h_1^{-1} h_2 g_2 \in Hg_2$, et, de même, $g_2 \in Hg_1$.

Donc, $\forall$ $l \in Hg_1$ $\exists$ h tel que $l = hg_1 = h h_1^{-1} h_2 g_2$
$\Rightarrow l \in Hg_2$. Donc $Hg_1 \subseteq Hg_2$. De même, $Hg_2 \subseteq Hg_1$. $\boxtimes$

Il en découle donc que G est "partagé" en classes ~~gH~~ Hg (gH).



<u>Déf.</u>: Pour un groupe fini G, on ~~dit~~ appelle l'ordre $|G|$ de G sa cardinalité.

<u>E.g.</u>: $|\mathbb{Z}_n| = n$, $|S_n| = n!$

<u>Thm.</u> (Lagrange): Pour tout sous-gp H d'un gp. G, $|H|$ divise $|G|$.

<u>Déf.</u>: L'indice $(G:H)$ de H en G est le nombre de "left cosets".

$(G:1) = |G|$

<u>Lagrange</u>: $(G:1) = (G:H)(H:1)$

<u>Thm.</u>: $\forall$ $H \supset K$ sous-gp. de G on a

$$(G:K) = (G:H)(H:K).$$

<u>Déf.</u>: Un sous-gp $H \subseteq G$ est dit "normal" si, $\forall g\ G$, $gH = Hg$.

Dans ce cas là, les classes Hg définissent un groupe G/H appellé "groupe quotient", avec produit $(Hg_1)(Hg_2) \equiv H(g_1g_2)$.

~~Don~~ Le produit est bien défini, car

$$(Hg_1)(Hg_2) = (H)(g_1H)g_2 = (H)(Hg_1)g_2 = Hg_1g_2$$

(E, g)

Table de Cayley

	e	g_1	g_2	$\cdots$	g_n
e	e	g_1	g_2	$\cdots$	g_n
g_1	g_1	g_1^2	$g_1 g_2$	$\cdots$	$g_1 g_n$
g_2					
$\vdots$					
g_n					

$\underline{S_3}$: permutations de trois objets Δ

Notation 1 : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b & c \\ \sigma(a) & \sigma(b) & \sigma(c) \end{pmatrix}$ pour $\sigma \in S_3$

Notation 2 : $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n) = a_1 \to a_2,\ a_2 \to a_3, \cdots, a_n \to a_1.$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \{ e, (12), (13), (23), (1\,2\,3), (3\,2\,1) \}$$

$(12)^2 = (13)^2 = (23)^2 = e.$ $\qquad (1\,2\,3)^2 = (3\,2\,1)$

$(3\,2\,1)^2 = (1\,2\,3)$, $\qquad (1\,2\,3)^3 = (3\,2\,1)^3 = e$

$(1\,2\,3)^{-1} = (3\,2\,1)$

Thm. : Tout élément de S_n peut s'écrire comme un produit de cycles disjoints.

$\mathbb{Z}_3 = \{ e, (1\,2\,3), (3\,2\,1) \} \subset S_3$, $\quad S_3/\mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}_2$.

Classes de conjugaison

<u>Déf.</u> : On dit que $g_1, g_2 \in G$ sont conjugués s'il existe un $h \in G$ tel que $g_1 = h g_2 h^{-1}$. $g_1 \sim g_2$

<u>Thm</u> : $\sim$ est une relation d'équivalence.

<u>Dém</u> : 1) $g \sim g$. Évident, il suffit de choisir $h = e$.

2) Si $g_1 \sim g_2$ alors $g_2 \sim g_1$. Posons $g_1 = h g_2 h^{-1}$ pour $h \in G$.

Alors $g_2 = h^{-1} g_1 h = (h^{-1}) g_1 (h^{-1})^{-1}$ $\square$

3) Si $g_1 \sim g_2$ et $g_2 \sim g_3$, alors $g_1 \sim g_3$.

Posons $g_1 = h_1 g_2 h_1^{-1}$, et $g_2 = h_2 g_3 h_2^{-1}$. Alors ~~$g_1 = (h_1 h_2) g_3 (h_2^{-1}$~~

$g_1 = h_1 h_2 g_3 h_2^{-1} h_1^{-1}$. Or $h_2^{-1} h_1^{-1} = (h_1 h_2)^{-1}$ $\square$

<u>E.g.</u> : S_3. $(12) \sim (13) \sim (23)$.

~~(13)~~ $(23) = (12)(13)(12)$ et $(23) = (13)(12)(13)$ et $(12) = (23)(13)(23)$.

$(321) = (12)(123)(12)$

Donc, on a $\underline{S_3 = \{} [e] \times 1, [(12)] \times 3, [(123)] \times 2 \}$

Pour S_n une classe est déterminée par sa structure de cycle disjoint.

Propriétés de S_n

25/09/15 (I)

Rappel : (———) , $(\quad\quad)$,

Lemme : Soit S_n le gp. Perm$(S=\{a_1, \dots, a_n\})$. $\forall \sigma \in S_n$, et tout a_i, $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que ~~σ^k~~ $\sigma^k(a_i) = a_i$.

Dém. : S est fini, donc l'ensemble $\{\sigma^l(a_i),\ l \in \mathbb{N}\} \subseteq S$ est aussi fini. Donc $\exists\ m<n$ tels que $\sigma^m(a_i) = \sigma^n(a_i)$.
$\Rightarrow \sigma^m(a_i) = \sigma^m \sigma^{n-m}(a_i) \Leftrightarrow a_i = \sigma^{n-m}(a_i)$. $\square$

Th. : Tout $\sigma \in S_n$ peut s'écrire come $\sigma = \prod_i c_i$.

Dém. : Définissons $E_i = \{a_i, \sigma(a_i), \dots, \sigma^{k_i - 1}(a_i)\}$ ou $\sigma^{k_i}(a_i) = a_i$ les orbites de σ. Alors $S = \bigcup_i E_i$ avec $E_i \cap E_j = \phi, (i \neq j)$.

Or, sur chaque E_i, σ agit comme un cycle,
$\sigma|_{E_i} = (a_i\ \sigma(a_i)\ \sigma^2(a_i) \dots \sigma^{k_i-1}(a_i))$.

Donc, $\sigma = \prod_i (E_i)$.

Prop. : La décomposition est unique.

Dém. : Chaque $a_i \in S$ ne peut appartenir qu'à un cycle, le cycle $(a_i, \sigma(a_i) \dots, \sigma^{k_i-1}(a_i))$.

Pour S_n, $[\sigma]$ est déterminée par sa structure de cycle.

<u>Thm.</u> : Pour tout $(i_1, \dots, i_k) \in S_n$ et tout σ S_n,

$\pi \equiv \sigma (i_1 \dots i_k) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k))$.

<u>Dém.</u> : a) π envoie $\sigma(i_1) \to \sigma(i_2)$, $\sigma(i_2) \to \sigma(i_3)$ ... et $\sigma(i_k) \to \sigma(i_1)$.

b) π ne déplace pas les éléments autres que $\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k)$.

a) $\pi(\sigma(i_1)) = \sigma(i_1 \dots i_k)(i_1) = \sigma(i_2)$. De même $\pi(\sigma(i_l)) = \sigma(i_{l+1})$ $l < k$, et $\pi(\sigma(i_k)) = \sigma(i_1)$.

b) Prenons $a \notin \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)\}$. Alors $\sigma^{-1}(a) \notin \{i_1, \dots i_k\}$

$\Rightarrow \pi(a) = \sigma (i_1 \dots i_k) \sigma^{-1}(a) = \sigma \circ \sigma^{-1}(a) = a$,

□

Donc, le conjugué d'un k-cycle est un k-cycle. Est-ce que deux k-cycles sont tjs conjugués ? Oui.

<u>Th.</u> : Les cycles de même longueur sont conjugués.

<u>Dém.</u> : Prenons $(a_1 \dots a_k)$ et $(b_1 \dots b_k)$.

Definissons σ tel que $\sigma(a_i) = b_i$, et σ est un bijection quelconque ~~sur~~ du complément de $(a_1 \dots a_k)$ au compl. de $(b_1 \dots b_k)$.

Alors, $\sigma (a_1 \dots a_k) \sigma^{-1} = (b_1 \dots b_k)$ par le thm. précédent.

□

<u>Prop.</u> : Les cycles disjoints commutent.

$\Rightarrow$ On peut définir les "type de cycle".

<u>Prop.</u> : $(a_1 \cdots a_k) = (a_1 a_k)(a_1 a_{k-1}) \cdots (a_1 a_2)$.

<u>Corollaire</u> : Tout $\sigma \in S_n$ peut s'écrire comme prod. de transpositions.

<u>Thm.</u> : Pour 2 décompositions d'un $\sigma \in S_n$ en transpo.,
$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r = \tau_1' \cdots \tau_{r'}'$, $r = r' \mod 2$.

<u>Dém.</u> : Nous avons $\tau_1 \cdots \tau_r (\tau_1' \cdots \tau_{r'}')^{-1} = e$, c.à.d. e admet une décompos. en un produit de $r+r'$ transpo. Nous allons démontrer que e n'admet pas une décompo. en un nbr. impair de transpo.

Définissons le polynôme $\Delta = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$, et l'action de S_n sur Δ suivante : $\sigma : \Delta \longrightarrow \prod_{1 \le i < j \le n} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$.

Soit $\sigma = (ij)$ une transpo. Alors, σ affecte les facteurs suivants :

$$
\begin{array}{lcl}
x_i - x_j & & (-1) \\
x_i - x_k ,\ x_j - x_k ,\ (j < k) & \xrightarrow{\sigma} & \longleftrightarrow \\
x_l - x_i ,\ x_l - x_j ,\ (l < i) & & \longleftrightarrow \\
x_i - x_m ,\ x_m - x_j \ ,\ (i < m < j) & & (-1)(\longleftrightarrow)
\end{array}
$$

$\Rightarrow \sigma : \Delta \to -\Delta$.

Donc, pour un prod. $\tau_1 \cdots \tau_r$; $\Delta \longrightarrow (-)^r \Delta$. Or $e : \Delta \to +\Delta$.
$\Rightarrow$ $r = 0 \mod 2$ $\square$

Signes

Déf. : Le signe d'une permutation σ est le signe $(-)^r$ où r est le nombre unique mod 2 tel que $\sigma = \prod_{i=1}^{r} \tau_i$ pour des transpo. τ_i.

Bien défini. ✓

Prop. : $sgn(\sigma\sigma') = sgn(\sigma)\, sgn(\sigma')$, $\quad sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma)$.

Prop. : $sgn((a_1 \dots a_k)) = (-)^{k+1}$.

Dém. : $(a_1 \dots a_k) = (a_1 a_k) \dots (a_1 a_2)$. □

A_n

$A_n = \{\sigma \in S_n \mid sgn(\sigma) = 1\}$.

Prop. : A_n est un groupe. ✓

E.g. : - $S_2 = \{(1), (12)\}$, $A_2 = \{(1)\}$.

- $A_3 = \{(1), (123), (321)\} \cong \mathbb{Z}_3$.

Prop. : A_n est non-Abélien pour $n \geq 4$.

Dém. : A_n contient les 3-cycles. Or $(123)(124) \neq (124)(123)$ □

Prop. : $|A_n| = \frac{n!}{2}$ pour $n \geq 2$.

Dém. : $\tau = (12) \notin A_n$. Si $\sigma \notin A_n$, alors $\sigma\tau \in A_n \Rightarrow \sigma \in A_n\tau$.

$\Rightarrow S_n = A_n \cup A_n\tau$, avec $A_n \cap A_n\tau = \emptyset$.

$|A_n\tau| = |A_n|$ car ~~τ est une~~ bijection $\tau \in$ ~~Aut~~ $(A_n \leftrightarrow A_n\tau$ □.

D_n

V

Def.1 : Gp. de symmetries d'un n-gône regulier :

Def 2 : $D_n = \{ r, s \mid r^n = e,\ s^2 = e,\ srs^{-1} = r^{-1} \}$.

$\hat{D}_n = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right\}$.

e.g. : $r \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $s \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$. $\hat{D}_n = D_n$

$|D_n| = 2n$. $D_n = \{ 1, r, \dots, r^{n-1}, s, rs, r^2 s, \dots, r^{n-1} s \}$.

Prop. :

Lemme : Si π_1 est π_2 sont disjoints, alors $\sigma\pi_1\sigma^{-1}$ et $\sigma\pi_2\sigma^{-1}$ aussi.

Thm. : 2 perm. $\in S_n$ sont conjuguées $\Leftrightarrow$ elles ont le même "type".

Dém. : "$\Rightarrow$") $\pi_1 = c_1 c_2 \cdots c_\ell$, alors $\sigma\pi_1\sigma^{-1} = \sigma c_1\sigma^{-1}\sigma c_2\sigma^{-1}\cdots c_\ell\sigma^{-1}$

or, les $\sigma c_i \sigma^{-1}$ ont le même types que les c_i.

"$\Leftarrow$") Posons $\pi_1 = (a_1 \cdots a_{k_1})(a_{k_1+1} \cdots a_{k_1+k_2})\cdots$

et $\pi_2 = (b_1 \cdots b_{k_1})(b_{k_1+1} \cdots b_{k_1+k_2})\cdots$.

On définit σ tel que $\sigma(a_i) = b_i$. $\square$

E.g. : - S_3 : $[e] = e$, $[(12)] = \{(12), (13), (23)\}$

$[(123)] = \{(123), (321)\}$

- A_3 : $[e]$, $[(123)]$, $[(321)]$. Notons que $[(123)] \neq [(321)]$

Thm. : Pour $\pi \in A_n$, la classe $[\pi]$ en S_n se brise en de différentes classes en A_n $\Leftrightarrow$ les longueurs de ses cycles sont des nombres impairs distincts.

Groupes quotient

Prenons $H \equiv \mathbb{Z}_3 = \{ e, (123), (321) \} \subset S_3$.

Nous avons que $(123) = (13)(12)$, $(321) = (12)(13)$.

$(12)H = \{(12),(23),(13)\} = (13)H = (23)H$ | $H(12) = \{(12),(13),(23)\}$

$(123)H = H = (321)H$. | $\Rightarrow H$ est normal.

Donc, il n'y a que 2 classes, $\{\underset{a}{\underset{\equiv}{H}}, \underset{b}{\underset{\equiv}{(12)H}}\}$.

$a^2 = a$. $b^2 = (12)H(12)H = H(12)(12)H = H$.

$ab = H(12)H = \underbrace{(12)H\, H}_{=\, b\,a} = (12)H = b$.

$\Rightarrow \quad G/H \cong \mathbb{Z}_2$.

Galois

$$
\begin{tikzcd}
 & S_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A_3 \arrow[dr] & & S_2 \arrow[dl] \\
 & I &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & S_4 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
V_8 \arrow[d] & A_4 \arrow[dl] \arrow[d] & S_3 \arrow[d] \\
V_4 \arrow[dr] & A_3 \arrow[d] & S_2 \arrow[dl] \\
 & I &
\end{tikzcd}
$$

$S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$

~~$A_4/A_3 \cong$~~

$A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}_3$

$V_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$S_3/A_3 = \mathbb{Z}_2$, $A_3 \cong \mathbb{Z}_3$,

$S_5 \to A_5 \to I$

$S_5/A_5 \cong \mathbb{Z}_2$

$A_5/I = A_5$ non-Ab.

Représentations

25/09/15 (I)

Idée : Etudier les espaces sur lesquels un gp. peut agir. Simplification si l'on "linéarise".

Déf. 1 : Une rep. linéaire ρ de G sur un esp. vect. V est une action
$$\rho : G \times V \to V, \quad (g, v) \mapsto \rho(g)(v)$$
telle que

$\rho(v_1+v_2) = \rho(v_1)+\rho(v_2)$ et $\rho(kv) = k\rho(v)$ $\forall k \in \mathbb{C}$

$\forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}$

Déf. 2 : Une rep. lin. ρ de G sur V est un homomorphisme de groupes $\rho : G \to GL(V)$.

Prop. : Les 2 déf. sont équiv.

$\rho(g) : V \to V$ est ~~auto~~ un inversible. ...

Déf. : Un morphisme $\phi : V_1 \to W_2$ entre deux rep. $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ est un application linéaire $\phi : V_1 \to V_2$ telle que le diagramme est commutatif pour tout $g \in G$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "\phi"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

c.a.d, $\phi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \phi$ $\forall g \in G$.

On peut aussi écrire $\rho_2^{-1}(g)\phi \circ \rho_1(g) = \phi$.

(Entrelacement).

On dit que 2 rep sont isomorphes s'il existe un morphisme inversible.

__Défi__ : Classer les reps d'un gp ~~à moins~~ aux d'isomorphismes près

---

__E.g.__ : $G = \mathbb{Z}$. $\rho(0) = \mathbb{1}$, $\rho(n) \in GL_n$; or

$\rho(n) = \rho(1+1+\dots+1) = \rho(1)\cdot\dots\cdot\rho(1) = \rho(1)^n$. Donc, le choix de $\rho(1) \in G$ détermine la repr.

$\Rightarrow$ Les classes d'isom. de repr. n-dimensionelles $\overset{bij.}{\longleftrightarrow}$ conj. de GL_m

$\leftrightarrow$ forme canonique de Jordan.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_2 \end{pmatrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$\mathbb{Z}_n = \{e, g, \dots, g^{n-1}\}$, $g^n = e$. $\rho(e) = \mathbb{1}$, $\rho(g^n) = \rho(g)^n = \rho(e)^n = \mathbb{1}$

$\Rightarrow \rho(g)$ détermine la repr.

$$\Rightarrow \rho(g) = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

or, $\rho(g)^n = \mathbb{1} \Rightarrow J_i^{\,n} = \mathbb{1}$

Prenons $J = \lambda \mathbb{1} + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

$$J^n = (\lambda \mathbb{1} + N)^n = \lambda^n \mathbb{1} + \binom{n}{1}\lambda^{n-1} N + \binom{n}{2}\lambda^{n-2} N^2 + \dots$$

or $$\begin{array}{cc} & p+1 \\ N^p = & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & & \\ & \ddots & & 1 & \\ & & \ddots & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \; p+1$$

donc $J^n = \mathbb{1} \Rightarrow \lambda^n = 1$ et $N = 0$.

Thm.: Pour tout repr. de $\mathbb{Z}_n$, ρ sur V, il existe une base telle que ~~tous~~ $\rho(g)$ est diagonale ~~pour~~ $\forall g \in G$, et les coeffs. sont des n-èmes racines de l'unité.

□

m-dim reps $\longleftrightarrow$ m-vecteurs $(\zeta^{k_1}, \dots, \zeta^{k_m})$, $\zeta^n = 1$.

Thm.: Tout groupe Abélien fini est isomorphe à un produit de groupes cycliques.

Prop.: Tout système de matrices ~~qu~~ diagonalisables qui commutent peut être simultanément diagonalisé.

$\Rightarrow$

Thm.: Toute repr. est un m-vecteur de repr. 1-dim.

Sous-représentations

Def. : Une sous-rep. de V est un espace G-invariant $W \subseteq V$, c.à.d $\forall w \in W, g \in G \Rightarrow \rho(g)w \in W$.

W est une repr. de G sous l'action des $\rho_V(g)$.

Def. : V/W pour $W \subseteq V$ est l'espace de cosets $v+W$.

Pour W G-inv., ρ_V définit une action de G sur V/W.

$g(v+W) = \rho(g)(v) + W$. Si $v' = v \mod W$, alors $v-v' \in W$ $\Rightarrow \rho(g)(v-v') \in W$. Donc les classe $\rho(g)v + W$ et $\rho(g)v' + W$ sont égales.

Def. : La somme directe de 2 repr. (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) est l'espace $V_1 \oplus V_2$ avec l'action $\left(\begin{array}{c|c} \rho_1(g) & 0 \\ \hline 0 & \rho_2(g) \end{array}\right)$.

Def : $V_1 \oplus V_2 = \underbrace{\{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2\}}_{v_1 \oplus v_2} \Big/ \left\{ \begin{array}{l} a(v_1 \oplus v_2) = (av_1) \oplus (av_2), \ \forall a \in \mathbb{C} \\ (v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1+v_2, w_1+w_2) \end{array} \right\}$

E.g. : $V_1 \subset V_1 \oplus V_2$ est une sous-repr. de $V_1 \oplus V_2$ et $V_2 \cong (V_1 \oplus V_2) / V_1$.

En général $V \neq V/W \oplus W$, or vrai pour G fini (et $F = \mathbb{C}$)

Def. : Une repr. est complètement réductible lorsqu'elle se décompose en somme directe de rep. irréd.

Prop : Toute repr. cplexe d'un gp. Abélien fini est complètement reductible. Toute repr. irred. est 1-dim.

E.g. : $S_3 \circlearrowright V = \mathbb{C}^3$. $D(e) = \mathbb{1}_3$, $D(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\{ e, \sigma = (123), \tau = (12) \}$

Prenons $W \subset V$ avec $W \cong \mathbb{C} = \{ a(1,1,1)^T \mid a \in \mathbb{C} \}$

$G \cdot W = W$.

Définissons le complément orthogonal $W^\perp \equiv \{ v \in V \mid v \cdot (1,1,1) = 0 \}$

Cherchons les vecteurs propres de $D(\sigma)$. ($\sim$ Cartan basis)

$W^\perp = \{ v_1 = (\xi^2, \xi, 1)^T, v_2 = (\xi, \xi^2, 1)^T \}$, $W = \{ v_3 = (1,1,1) \}$.

$D(\sigma) v_i = \xi^i v_i$, $D(\tau) v_1 = v_2$, $D(\tau) v_2 = v_1$, $D(\tau) v_3 = v_3$.

On diagonalise $D(\sigma)$:

$$D(\sigma) \to D(\sigma)' = \begin{pmatrix} v_1^\dagger \\ v_2^\dagger \\ v_3^\dagger \end{pmatrix} D(\sigma) \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & & \\ & \xi^2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$D(\tau) \to D(\tau)' = D(\tau)$ ✓.

On a donc $\underset{}{V} \cong \underset{\mathbb{C}}{\underset{\shortparallel}{W}} \oplus \underset{\mathbb{C}^2}{\underset{\shortparallel}{W^\perp}}$

$(D(g)^\dagger = D(g^{-1}) = D(g)^{-1})$.

Th. : Toute repr. d'un gp. fini sur un $\mathbb{C}\,V_{\mathbb{C}}$ est complètement réductible.

2 Dém.

I) Def. : Un repr. (ρ, V) de G est unitaire si V est muni d'un produit scalaire Hermitien (i.e., $(w,v) = \overline{(v,w)}$) invariant sous l'action de G. C.à.d $\langle g\cdot w | g\cdot v\rangle = \langle w|v\rangle$ $\forall\, v,w \in V$ et $\forall g\ G$.

V est unitarisable lorsqu'il admet un tel $\langle\,|\,\rangle$.

Prop. : (ρ, V) est unitaire $\Longleftrightarrow$ $\rho(G) \subseteq U(V) \subset GL(V)$

$$\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1} = \rho(g)^{\dagger}.$$

Lemme : Toute repr. sur un espace vect. cplexe d'un gp. fini est unitarisable.

Dém. : On prend un $\langle\,|\,\rangle$ hermitien quelconque de V, et on définit sa "moyenne"

$$\langle v|w\rangle_G \equiv \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \langle g\cdot v | g\cdot w\rangle.$$

Lemme : Soit (ρ, V) une repr. unitaire et $W \subseteq V$ un sous espace invariant. Alors $W^{\perp}$ est aussi invariant.

Dém. : Si $v \in W^{\perp}$, alors $\langle v|w\rangle = 0$ $\forall\, w \in W$. Prenons $g^{-1}w \in W$. Alors $\langle v| g^{-1}w\rangle = \langle gv|w\rangle = 0$. $\Rightarrow gv \in W^{\perp}$ $\forall g \in G$ QED

Thm. : Toute $\mathbb{C}$-rep. est complètement réductible 2/10/15 (VII)

Dém. : $V \to W \oplus W^\perp \to \dots \to W_1 \oplus \dots \oplus W_k$. La procédure se termine car $\dim V < \infty$ $\square$

Thm. : Si $W \subseteq V$ est une sous-repr. d'un gp. fini G, alors $\exists$ un espace complémentaire invariant W' tel que $V \cong W \oplus W'$.

Dém. : Prenons une projection quelconque $P : V \to W$, c.à.d. $P^2 = P$ et $P|_W = id_W$. Alors, on définit la "moyenne" π de P

$$\pi \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ P \circ g^{-1}.$$ π est un projecteur invariant $\pi : V \to W$.

a) $\pi^2 = \pi$. $P^2 = P$ et $P|_W = id_W$, et $gW \subseteq W$, donc $gPv \subseteq W$ $\forall g, v$.

Donc, $PgPv = gPv$ $\forall g \in G, \forall v \in V$.

$$\Rightarrow \pi^2 = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, \tilde{g} \in G} \tilde{g} \circ \underbrace{P \circ \tilde{g}^{-1} \circ g \circ P}\circ g^{-1} = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, \tilde{g}} \tilde{g}\, \tilde{g}^{-1} g\, P g^{-1}$$

$$= \frac{|G|}{|G|^2} \sum_g g P g^{-1} = \pi$$

b) $\operatorname{Im} \pi \subseteq W$. $\forall v \in V$, $\pi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_g g P g^{-1} v$. Or, si $Pg^{-1}v \in W$, alors $gPg^{-1}v \in W$.

c) $\pi|_W = id_W$. $\forall w \in W$, $\pi(w) = \frac{1}{|G|} \sum_g g P g^{-1} w$. Or, $g^{-1} w \in W$

$\Rightarrow Pg^{-1}w = g^{-1}w \Rightarrow \pi(w) = w$. $\Rightarrow \operatorname{Im}(\pi) \cong W$.

d) $h \circ \pi = \pi \circ h$ $\forall h \in G$. $\frac{1}{|G|} \sum_g g \circ P g^{-1} h = \frac{1}{|G|} \sum_{g'} h g' P \circ g'^{-1}$ ✓.

e) $W' \equiv \ker \pi$ est invariant. $\pi \circ g = g \circ \pi \quad \forall g \in G$. (VIII)

Donc, si $\pi(w) = 0 \Rightarrow \pi(gw) = g \circ \pi(w) = 0 \quad \forall g$ ✓.

$\Rightarrow W \cap W' = \phi$

$\Rightarrow V = W \oplus W'$ $\square$

<u>Contre-exemples</u> : 1) $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow GL_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{C}^2$

$a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad a+b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{C} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{C}^2$ est invariant.

2) $G_n = \{\xi\}/(\xi^n = e)$, $\quad F = \mathbb{F}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

$\rho : \xi^j \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \rho : G_n \to GL_2(F)$

Schur

<u>Thm.</u> (Schur) : Soient V et W deux repr. irréd. de G et $\phi : V \to W$ un G-morphisme, alors

1) Soit ϕ est un isomorphisme, soit $\phi = 0$.

2) Si $V \equiv W$, alors $\phi = \lambda \mathbb{1}_V$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$.
$\uparrow$! (c.à.d $\rho_V(g) = \rho_W(g)$ $\forall g$)

<u>Dém.</u> : 1) $\ker \phi$ et $\operatorname{im} \phi$ sont des sous-espaces invariants de V et W. Donc, soit $\ker \phi = V \Rightarrow \operatorname{im} \phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$, soit $\ker \phi = 0 \Rightarrow \operatorname{im} \phi = W \Rightarrow \phi$ est un isomorphisme.

2) $\mathbb{C}$ est algébriquement fermé, donc $\det(\phi - \lambda \mathbb{1}_V) = 0$ a au moins une solution pour λ,
$\Rightarrow$ Soit λ_0 une telle solution. Alors $\ker(\phi - \lambda_0 \mathbb{1}_V) \neq 0$.
Or $\phi - \lambda_0 \mathbb{1}_V$ est aussi un G-morphisme. $\Rightarrow \ker(\phi - \lambda_0 \mathbb{1}_V) = V$.
c.à.d. $\phi = \lambda_0 \mathbb{1}_V$ $\square$.

<u>E.g.</u> : $G = S_3$, V_2, $\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^2 \end{pmatrix}$; $\rho(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $\phi : V_2 \to V_2$ avec $\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$[\phi, \rho(\sigma)] = \begin{pmatrix} 0 & b(\xi^2 - \xi) \\ c(\xi - \xi^2) & 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \iff b = c = 0$$

$$[\phi, \rho(\tau)] = \begin{pmatrix} -b+c & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d-a \\ a-d & 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow a = d \Rightarrow \phi = \lambda \mathbb{1}_2$$

<u>Attention</u> ! Si $\rho_V \cong \rho_{V'}$ avec $\rho_V \neq \rho_{V'}$, alors $\phi \neq \lambda \mathbb{1}$. E.g. $\rho'(\sigma) = \begin{pmatrix} \xi^2 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}$

<u>Contre-ex</u> : $\begin{pmatrix} \rho_i & \\ & \rho_i \end{pmatrix} \to$ Perm blocks.

X

<u>Corrollaire</u> : Toute repr. $_{\mathbb{C}}$ irréd. d'un gp. Abélien fini est 1-dim.

<u>Dém.</u> : $\forall g\, G$, on défini $\rho(g) : V \to V$ un isomorphisme.

~~Donc~~ Or $\underline{\rho(g) \circ \rho(h) = \rho(h) \circ \rho(g)}$ $\forall h$. $\Rightarrow \rho(g) \propto \mathbb{1}_V$.

<u>Prop.</u> : Pour toute repr. V, la décomposition en repr. irred.

$V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \ldots \oplus V_k^{\oplus a_k}$ est unique au choix de bases des $V_i^{\oplus a_i}$ près.

Les charactères

<u>Idée</u> : Spécifier les $\rho(g)$ en donnant leurs valeurs propres, $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$

Les λ_i sont les solutions de ~~$\det(\rho(g) - x\mathbb{1}_d) = x^d$~~.

$$\det(\mathbb{1}_V x - \rho(g)) = x^d - e_1(\lambda_1, \dots, \lambda_d)\lambda^{d-1} + e_2 \lambda^{d-2} + \dots + (-1)^d e_d$$

où $e_k(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \equiv \sum\limits_{0 \leq \lambda_{i_1} < \dots < \lambda_{i_k} \leq 1} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}$ $\left(\text{e.g. } e_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 \right)$.

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ les valeurs propres de $\rho(g)$, alors $\{\lambda_1^k, \dots, \lambda_d^k\}$ sont les valeurs propres de $\rho(g)^k$,

<u>Newton</u> : $k e_k = \sum\limits_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i}\, p_i$ où $p_i = \sum\limits_{l=1}^{d} \lambda_l^i$.

Donc, s'il on connait les p_i pour $i = 1, \dots, m$ ou $\rho(g)^m = \mathbb{1}$, alors on connait tous les λ de $\rho(g)$.

<u>Déf</u>: On définit donc le charactère d'une representation (ρ, V) comme

$$\chi_V(g) = \operatorname{tr}_V \rho(g) \quad \forall g.$$

<u>Prop.</u> : $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g) \quad \forall h \in G$. Donc $\chi_V \in \mathbb{C}_{class}(G)$.

$\Rightarrow \{\chi_{V_i}\} \leftrightarrow \{\text{conj.}\}$

<u>Prop.</u> : $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$, $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$, $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$

$\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V}(g)$. $\qquad \chi_{\Lambda^2 V} = \frac{1}{2}\left[\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)\right]$

Projecteurs

Soit (ρ, V) une repr. de G. On définit $\pi \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$

$\forall v \in V$ et $\forall h \in G$, on a $\rho(h) \cdot \pi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_g \rho(h \cdot g) v = \frac{1}{|G|} \sum_{g'} \rho(g') v$
$= \pi(v)$ où $g' = hg$.

On note que $\pi^2 = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g_1, g_2} \rho(g_1 g_2) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g_1, g' = g_1 g_2} \rho(g') = \frac{|G|}{|G|^2} \sum_{g'} \rho(g')$
$= \pi$.

Donc, π est un projecteur $\pi : V \to V^G$ où $V^G \equiv \{ v \in G \,|\, \rho(g) v = v \ \forall g \in G \}$

$V^G = \oplus$ repr. triviales.

$\pi|_{V^G} = id_{V^G}$. On écrit donc $V \cong V^G \oplus V^{G\perp}$ où

$V^{G\perp} \equiv \ker \pi$. Alors, $\boxed{tr\, \pi = \dim V^G} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$

$Hom(V, W) \cong V^* \otimes W$

$V \xrightarrow{\phi} W$, on définit $\phi_i{}^j$ tels que $\phi(v_i) = \sum_j \phi_i{}^j w_j$
$\{v_i\}$ $\{w_j\}$

alors $\phi \longleftrightarrow \phi_i{}^j \, dv^i \otimes w_j$

$\rho_V(g)$, alors $\rho_{V^*}(g) = \rho_V(g^{-1})$, et $\rho_V(g^{-1}) = \overline{\rho_V}(g)$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ \rho_V(g) \downarrow & & \downarrow \rho_W(g) \\ V & \xrightarrow{\rho_{Hom}(g)\phi} & W \end{array}$$

$\rho_{Hom(V,W)}(g)\, \phi \equiv \rho_W(g) \circ \phi \circ \rho_V(g^{-1})$

Alors, on remarque que $\mathrm{Hom}_G(V,W)$ correspond à l'espace d'applications linéaires qui sont des G-morphismes.

$$\rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)\,\phi = \phi \iff \rho_W(g)\circ\phi\circ\rho_V(g^{-1}) = \phi$$

Donc, pour V et W irréd., nous avons

$$(V^*\otimes W)^G \cong \mathrm{Hom}_G(V,W) \subseteq V^*\otimes W \cong \mathrm{Hom}(V,W).$$

Donc $\dim (V^*\otimes W)^G = \begin{cases} 1 & \text{ssi } V\cong W \\ 0 & \text{ssi } V\not\cong W \end{cases}$

Définissons donc le projecteur pour $V^*\otimes W$,

$\pi_{V^*\otimes W} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_{V^*\otimes W}(g)$. Alors

$$\dim (V^*\otimes W)^G = \mathrm{tr}\,\pi_{V^*\otimes W} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathrm{tr}\,\rho_{V^*\otimes W}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_g \chi_{V^*}(g)\chi_W(g)$$

Donc, nous obtenons la relation d'orthogonalité

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Thm.: Soient } V \text{ et } W \text{ deux irrep., alors} \\ (\chi_V,\chi_W) \equiv \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)}\,\chi_W(g) = \begin{cases} 1 \iff V\cong W \\ 0 \iff V\not\cong W\end{cases}\end{array}}$$

Rappels

<u>Déf.</u> : Soit (ρ, V) une repr. d'un gp fini G. On définit le charactère $\chi_{(\rho,V)}(g)$ $\forall g \in G$ comme $\chi_{(\rho,V)}(g) := \mathrm{tr}_V\, \rho(g)$

<u>Déf.</u> : Soient (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux repr. de G, et $V_1 \oplus V_2$ la somme directe des espaces vectoriels. On définit la somme dir. $(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ des repr. ainsi

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) : v_1 \oplus v_2 \longmapsto \rho_1(g) v_1 \oplus \rho_2(g) v_2 \qquad \forall g,\ \forall v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$$

<u>Prop.</u> : $$\chi_{(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)}(g) = \chi_{(\rho_1, V_1)}(g) + \chi_{(\rho_2, V_2)}(g) \qquad \forall g.$$

<u>Déf.</u> : Soient (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux reprs., et $V_1 \otimes V_2$ le produit tensoriel des deux esp. vec. On définit le prod. tensoriel des reps. ainsi :

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) : v_1 \otimes v_2 \longmapsto (\rho_1(g) v_1) \otimes (\rho_2(g) v_2) \qquad \forall g \in G,\ \forall v_1 \in V_1\ \forall v_2 \in V_2$$

<u>Prop.</u> : $$\chi_{(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)}(g) = \chi_{(\rho_1, V_1)}(g)\, \chi_{(\rho_2, V_2)}(g) \qquad \forall g \in G.$$

Soit (ρ_V, V) une repr. de G.

On définit $V^* \equiv \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ tel que si $\phi \in V^*$,

$\phi(\alpha v + \beta w) = \alpha\phi(v) + \beta\phi(w) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \forall v, w \; V$.

$\mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel : $\forall \; \phi_1, \phi_2 \in V^*$, on définit $\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tel que $(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)(v) = \alpha\phi_1(v) + \beta\phi_2(v)$ $\forall v \in V$.

Donc $\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \in V^*$.

Puisque V^* est un espace vectoriel, peut-on lui attribuer une repr. de G "canonique" par rapport à (ρ_V, V) ?

<u>Candidat 1</u> : Définissons $(\tilde{\rho}, V^*)$ tel que $\tilde{\rho}(g)\phi \equiv \phi \circ \rho_V(g)$

c.à.d., $\forall g \in G$ et $\forall \phi \in V^*$ on définit $\phi_g \equiv \tilde{\rho}(g)\phi$ tel que, $\forall v \in V$, $\phi_g(v) = \phi(\rho_V(g)(v))$.

Prenons $\tilde{\rho}(g_1 g_2)(\phi) = \phi_{g_1 g_2}$ tel que $\phi_{g_1 g_2}(v) = \phi(\rho_V(g_1 g_2)(v))$

alors, $\phi_{g_1 g_2}(v) = \phi(\rho_V(g_1)\rho_V(g_2)(v)) = \underbrace{(\tilde{\rho}(g_1)\phi)}_{\phi_{g_1}}(\rho_V(g_2)(v))$

$= \left(\tilde{\rho}(g_2)(\tilde{\rho}(g_1)\phi)\right)(v)$.

$$\Rightarrow \tilde{\rho}(g_1 g_2) \neq \tilde{\rho}(g_1)\tilde{\rho}(g_2)$$
$$\quad\quad " \quad = \tilde{\rho}(g_2)\tilde{\rho}(g_1).$$

<u>Candidat 2</u> : $\rho_{V^*}(g)\phi = \phi \circ \rho_V(g^{-1})$.

Alors $\rho_{V^*}(g_1g_2)\phi(v) = \phi(\rho_V(g_2^{-1}g_1^{-1})(v)) = \phi(\rho_V(g_2^{-1})\rho_V(g_1^{-1})(v))$

$= (\rho_{V^*}(g_2)\phi)(\rho_V(g_1^{-1})(v)) = \Big(\rho_{V^*}(g_1)(\rho_{V^*}(g_2)\phi)\Big)(v)$

$\Rightarrow \rho_{V^*}(g_1g_2) = \rho_{V^*}(g_1)\rho_{V^*}(g_2)$ ✓

Le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "1"] \\ V \arrow[r, "\rho_{V^*}(g)\phi"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\rho_{V^*}(g)\phi = \phi \circ \rho_V(g^{-1})}$$

<u>Déf</u> : Soit (ρ_V, V) une repr. de G, et $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel dual. On définit la repr. (ρ_{V^*}, V^*) duale à (ρ_V, V) ainsi : $\forall g \in G$, $\forall \phi \in V^*$, $\rho_{V^*}(g)(\phi) = \phi \circ \rho_V(g^{-1})$.

$\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$

Soit $dv \in V^*$ et $w \in W$. Alors $dv \otimes w\,(v) = (dv(v))\,w$

$\Rightarrow dv \otimes w : V \to W$. D'ailleurs, $dv \otimes w$ est bilinéaire

$\Rightarrow dv \otimes w \in V^* \otimes W$.

IV

Prenons des bases $V = \{v^i\}$ et $W = \{w^j\}$.

Alors, $\forall \phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, on a $\phi(\sum_i a_i v^i) = \sum_i a_i \phi(v^i)$

Définissons la matrice Φ telle que $\phi(v^i) = \sum_j \Phi_j{}^i w^j$

Alors $\phi(a_i v^i) = (\phi_j{}^i a_i) w^j$.

Prenons une base duale $\{dv_i\} = V^*$ telle que

~~$dv_i(v$~~ $dv_i(v^j) = \delta_i{}^j$.

Alors, $\forall \phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, on definit l'objet

$T_\phi \in V^* \otimes W$ $\quad T_\phi = \sum_{i,j} \phi_i{}^j w^i \otimes dv_j$.

On constate que $T_\phi(\sum_k a_k v^k) = \sum_{i,j,k} a_k \Phi_i{}^j w^i \otimes (\delta_j{}^k)$

$$= \sum_{i,j} (\Phi_i{}^j a_j) w^i = \phi(\sum_k a_k v^k) \checkmark$$

$\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \#$ de coeffs de $\Phi = (\dim V)(\dim W)$.

$\dim V^* \otimes W = (\dim V^*) \dim W = (\dim V)(\dim W)$

$\Rightarrow \mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$.

Soient (ρ_V, V) et (ρ_W, W) deux repr. de G. (V)

<u>Def 1</u>: On définit la repr. $\left(\rho_{Hom(V,W)}, Hom(V,W)\right)$ ~~aussi~~ telle que le diagramme ci-dessous est commutatif.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] & W \arrow[d, "\rho_W(g)"] \\ V \arrow[r, "\rho_{Hom(V,W)}(g)(\phi)"'] & W \end{tikzcd}$$

c.à.d

$$\rho_{Hom(V,W)}(g)\,\phi = \rho_W(g)\circ\phi\circ\rho_V(g^{-1})$$

<u>Def 2</u>: On définit $(\rho_{V^*\otimes W}, V^*\otimes W)$ ainsi

$$\rho_{W\otimes V^*}(g)\,(w\otimes dv) = \rho_W(g)\otimes\rho_{V^*}(g)\,(w\otimes dv)$$

$$= (\rho_W(g)w)\otimes(dv\circ\rho_V(g^{-1})) = \rho_W(g)\circ(w\otimes dv)\circ\rho_V(g^{-1})$$

✓

<u>Prop.</u>: $\chi_{(\rho_{V^*}, V^*)}(g) \underset{(2)}{=} \chi_{(\rho,V)}(g^{-1}) \underset{(1)}{=} \overline{\chi_{(\rho,V)}(g)}$

<u>Dém.</u>: (1) Soit $v^i \in V$ un vecteur propre de $\rho_V(g)$ avec $\rho_V(g)v^i = \lambda_i v^i$. Étant donné que $\exists\, k\in\mathbb{N}$ tel que $\rho_V(g)^k = id_V$, et que $\rho_V(g)^n v^i = \lambda_i^n v^i$, $\Rightarrow \lambda_i^k = 1$.

Donc, toutes les valeurs propres de $\rho_V(g)$ sont des racines de l'unité. Or, $\rho_V(g^{-1})\rho_V(g)v^i = v^i$
$= \lambda_i\,\rho_V(g^{-1})v^i \Rightarrow \rho_V(g^{-1})v^i = \lambda_i^{-1}v^i$

Donc, les valeurs propres de $\rho_V(g^{-1})$ sont les inverses des valeurs propres de $\rho_V(g)$. $\rho_V(g) : (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$

$\rho_V(g^{-1}) : (\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$. Or, $\lambda_i^{-1} = \bar{\lambda}_i$ pour λ_i une racine de l'unité.

$$\Rightarrow \quad \chi_{(\rho,V)}(g^{-1}) = \overline{\chi}_{(\rho,V)}(g) \qquad \square$$

2) $\rho_{V^*}(g)\circ\phi = \phi \circ \rho_V(g^{-1}) \quad \forall \phi \in V^*$. Donc, $\rho_{V^*}(g)$ est une matrice aux valeurs propres de $\rho_V(g^{-1})$

$\square$

$$\boxed{\underline{\text{Corr.}} : \quad \chi_{(\rho_{Hom(V,W)},\, Hom(V,W))}(g) = \overline{\chi_V(g)}\, \chi_W(g) \quad \forall g \in G.}$$

Nous avons défini pour tout (ρ, V) le projecteur

$\pi_{V^G} = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \rho_V(g)$ tel que $\pi_{V^G} : V \longrightarrow V^G$.

Nous avons vu que $tr\, \pi_{V^G} = \dim V^G$.

$$Hom_G(V,W) = \{ \phi \in Hom(V,W) \mid \rho_{Hom(V,W)}(g)\,\phi = \rho_W(g)\circ\phi\circ\rho_V(g^{-1}) = \phi \quad \forall g \in G \}$$

c.à.d. $\rho_W(g)\circ\phi = \phi\circ\rho_V(g) \longleftrightarrow \phi$ est un entrelacement.

$$\Rightarrow \boxed{\dim Hom_G(V,W) = \left\{ \begin{array}{l} \#\ \text{entrelacement} \\ \text{lin indép} \end{array} \right\} = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\chi_V(g)}\, \chi_W(g)}$$

VII

Or, d'après Schur (1), si (ρ_V, V) et (ρ_W, W) sont des irreps., alors $\dim \mathrm{Hom}_G(V,W) = \begin{cases} 1^* \text{ si } (\rho_V,V) \cong (\rho_W,W) \\ 0 \text{ si } \ncong \end{cases}$

---

* si $(\rho_V, V) = (\rho_W, W)$, alors $\phi = \lambda \,\mathrm{id}$ ✓.

si $(\rho_V, V) \cong (\rho_W, W)$ mais $(\rho_V, V) \neq (\rho_W, V)$, alors, $\exists\ S$ tel que $\rho_W = S \rho_V S^{-1}$. S est unique (à échelle près). Dém.: Posons $S' \neq S$ avec $\rho_W = S' \rho_V S'^{-1} = S \rho_V S^{-1}$. Alors, $\rho_V = S'^{-1} S \rho_V S^{-1} S'$

$= (S'^{-1}S)\rho_V (S'^{-1}S)^{-1}$

Or tel que $S'^{-1}S \neq \lambda \mathrm{id}$ $\longrightarrow$ ⨳ par Schur (2).

$\Rightarrow$ Thm.: Soient (ρ_V, V) et (ρ_W, W) deux irreps.

Alors $(\chi_V, \chi_W) \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)}\, \chi_W(g) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow (\rho_V, V) \cong (\rho_W, W) \\ 0 \Leftrightarrow \ncong \end{cases}$

Soit (ρ_i, V^i) un système complet d'irrep. de G. Alors, si (ρ_V, V) admet une décompos. $V = \bigoplus_i V^{i \oplus n_i}$,

$\boxed{n_i = (\chi_{V^i}, \chi_V)}$ car $\chi_V = \sum_i n_i \chi_{V_i}$

Conséquences

Cor.: Soit V une représentation. Alors $(\chi_V, \chi_V) = 1 \Rightarrow V$ est irréd.

Dém.: Posons $V = \bigoplus_i V_i^{\oplus r_i}$ où les $\{V_i\}$ sont un système complet d'irreps. Alors $(\chi_V, \chi_V) = \sum_i r_i^2$. Cela ne peut être égal à une que si $r_i = 1$ pour un seul i, et zéro pour le reste. □

Corr.: La multiplicité r_i de V_i dans V est donnée par

$r_i = (\chi_{V_i}, \chi_V)$

La regulière

Pour G un gp fini avec $|G| = \{e, g_1, \dots, g_{|G|-1}\}$, definissons l'espace vectoriel $V_R \equiv \mathbb{C}^{|G|}$ avec base orthonormée $\{e_{g_i}\}$ pour $i = 0, \dots, |G|$

Def.: La représentation regulière de G a V_R comme espace vectoriel, avec l'action ρ_R du groupe telle que

$\rho_R(h)\, e_g = e_{hg} \quad \forall\, h, g \in G$.

Prop.: $\chi_R(g) = \begin{cases} 0, & g \neq e \\ |G|, & g = e \end{cases}$

Thm. : La représentation regulière R admet la décomposition suivante $V_R = \bigoplus_i V_i^{\oplus \dim V_i}$ où i est sommé sur toutes les irrep.

Dém. : $(\chi_{V_i}, \chi_R) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \bar{\chi}_{V_i}(g)\, \chi_R(g) = \frac{1}{|G|} \bar{\chi}_{V_i}(e)\, \chi_R(e)$

$= \frac{1}{|G|} (\dim V_i)(|G|) = \dim V_i$ $\square$

Thm. (Burnside) : Soit $\{V_i\}$ un système complet d'irrep.. Alors, $\sum_i (\dim V_i)^2 = |G|$

Dém. : $\chi_R(g) = \sum_i (\dim V_i)\, \chi_{V_i}(g) \quad \forall g \in G$.

Donc, $\chi_R(e) = |G| = \sum_i (\dim V_i)\, \chi_{V_i}(e) = \sum_i (\dim V_i)^2$ $\square$

Prop. : $\sum_i (\dim V_i)\, \chi_{V_i}(g) = 0 \quad \forall g \neq e$.

Rappel : $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g) \quad \forall g$. Donc $\chi_V(g)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de g, $[g]$. i.e. $\chi_V \in \mathbb{C}_{class}(G)$

E.g. : $G = S^3$. Nous avons vu 4 repr. :

1) $V_3 = \mathbb{C}^3$; $\rho_{\mathbb{C}^3}(e) = \mathbb{1}_3$, $\rho_{\mathbb{C}^3}((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $\rho_{\mathbb{C}^3}((123)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $V_1 = \mathbb{C}$, $\rho_{V_1}(e) = 1$, $\rho_{V_1}((12)) = 1$, $\rho_{V_1}((123)) = 1$

3) $V_{alt} = \mathbb{C}$, $\rho_{V_{alt}}(e) = 1$, $\rho_{V_{alt}}((12)) = -1$, $\rho_{V_{alt}}((123)) = 1$

4) $V_{std} = V_2 = \mathbb{C}^3$, $\rho_{V_2}(e) = \mathbb{1}_2$, $\rho_{V_2}((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\rho_{V_2}((123)) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$

Tableaux de charactères:

	1 $[e]$	3 $[(12)]$	2 $[(123)]$
$\chi_{\mathbb{C}^3}$	3	1	0
χ_{V_1}	1	1	1
$\chi_{V_{alt}}$	1	-1	1
χ_{V_2}	2	0	-1

$(\chi_{\mathbb{C}^3}, \chi_{\mathbb{C}^3}) = \frac{1}{6}(3^2 + 3 \cdot 1^2 + 0) = 2 \neq 1$

$(\chi_{V_1}, \chi_{V_1}) = \frac{1}{6}(1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1) = 1$

$(\chi_{V_2}, \chi_{V_2}) = \frac{1}{6}(\quad " \quad) = 1$

$(\chi_{V_2}, \chi_{V_2}) = \frac{1}{6}(4 + 0 + 2(-1)^2) = 1$

$(\dim V_1)^2 + (\dim V_{alt})^2 + (\dim V_2)^2 = 1 + 1 + 4 = 6 = |G|$ ✓

$\chi_R = (6, 0, 0) = 1 \times (1, 1, 1) + 1 \times (1, -1, 1) + 2 \times (2, 0, -1)$

$(\rho_R, \mathbb{C}^6) \cong (\rho_{V_1}, \mathbb{C}) \oplus (\rho_{V_{alt}}, \mathbb{C}) \oplus (\rho_{V_2}, \mathbb{C}^2) \oplus (\rho_{V_2}, \mathbb{C}^2)$

Projecteurs (suite)

<u>Déf.</u> :

Soit (ρ_V, V) une repr. de G et (ρ_{V_i}, V^i) une repr. irréd.

On définit l'opérateur suivant :

$$\Pi_{V_i}^{\ V} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_{V_i}(g)\, \rho_V(g) : V \to V$$

<u>Prop.</u> : Soit $V = \bigoplus_j V^{\oplus r_j}$ la décompo. en irreps.

Alors $\Pi_{V_i}^{\ V} : V \to V_i^{\oplus r_i}$ est un projecteur sur $V_i^{\oplus r_i}$.

<u>Dém.</u> : Prenons d'abord $\Pi_{V_i}^{\ V_j}$ ou (ρ_{V_i}, V_i) et (ρ_{V_j}, V_j) sont irréd.

Alors $\Pi_{V_i}^{\ V_j} = \frac{1}{|G|} \sum_j \bar{\chi}_{V_i}(g)\, \rho_{V_j}(g) : V_j \to V_j$

on a que $\Pi_{V_i}^{\ V_j} = \lambda\, id_{V_j}$ (Schur (1)). $\Rightarrow$

$$\lambda = \frac{tr(\Pi_{V_i}^{\ V_j})}{dim(V_j)} = (\chi_{V_i}, \chi_{V_j}) = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \boxed{\Pi_{V_i}^{\ V_j} = \delta_{ij}\, id_{V_j}}$$

Alors, pour V, on a $\Pi_{V_i}^{\ V} = \bigoplus_j \left(\Pi_{V_i}^{\ V_j}\right)^{\oplus r_j} = \bigoplus_j \left(\delta_{ij}\, id_{V_j}\right)^{\oplus r_j}$ $\square$

<u>E.g.</u> : $G = S_3$; $\Pi_{V_2}^{\ \mathbb{C}^3} = \frac{1}{6}\left(2 \cdot \mathbb{1}_3 + (-1)\cdot\begin{pmatrix} 0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} + (-1)\cdot \cancel{\begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0& \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\right)$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix} \qquad \ker \Pi_{V_2}^{\ \mathbb{C}^3} \cong \mathbb{C} = \left\{ c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \checkmark.$$

$\mathbb{C}_{class}(G) = \{\text{charactères}\}$

$\mathbb{C}_{class}(G) = \{ f : G \to \mathbb{C} \mid f(hgh^{-1}) = f(g) \ \forall h \in G \}$.

Si (ρ, V) est une repr de G, alors $\chi_{\rho_V} \in \mathbb{C}_{class}(G)$.

On définit un produit scalaire Hermitien sur $\mathbb{C}_{class}(G)$:

$$(f, \phi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f(g)}\, \phi(g).$$

Alors, Pour $\{(\rho_i, V_i)\}$ un système complet d'irreps., les χ_{V_i} sont orthogonaux. Mais forment-ils une base complète pour $\mathbb{C}_{class}(G)$?

<u>Lemme</u> : Soit $\alpha \in \mathbb{C}_{class}(G)$ tel que $(\alpha, \chi_\rho) = 0 \ \forall (\rho, V)$ de G. Alors, $\alpha = 0$.

<u>Dém.</u> : ~~Du~~ Pour chaque irrep. (ρ_i, V_i) ; $\Pi_{\alpha, V_i} = \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\alpha}(g)\, \rho_{V_i}(g)$

$\Pi_{\alpha, V_i} \in \mathrm{End}_G(V_i)$. Donc $\Pi_{\alpha, V_i} = \lambda_i \, id_{V_i}$ avec $\lambda_i = \frac{tr(\,)}{\dim V_i} = (\alpha, \chi_{V_i})$

$\Rightarrow \Pi_{\alpha, V_i} = 0 \ \forall (\rho_i, V_i)$. $\Rightarrow \Pi_{\alpha, V} = 0 \ \forall (\rho, V)$.

Prenons la repr. regulière (ρ_R, R) et agissons sur v_e,

$\Pi_{\alpha, R}(v_e) = \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\alpha}(g)\, v_g = 0$. Or, les $\{v_g\}$ sont lin. ind

$\Rightarrow \alpha(g) = 0 \ \forall g \in G$. $\square$

<u>Thm.</u> : Les χ fournissent une base complète de $\mathbb{C}_{class}(G)$.
$\{\chi\} \leftrightarrow \{\text{conj.}\}$

La régulière (bis)

16/10/15 (I)

On avait défini (ρ_R, R), $R = \mathbb{C}^{|G|} = \{e_{g_i}\}$, et $\rho_R(g)\, e_{g_i} = e_{gg_i}$

Soit $\mathbb{C}(G) \equiv \{ f : G \to \mathbb{C} \}$. Prenons une base canonique de fonctions $\{e_{g_i}\}$, où $e_{g_i}(g_j) = \delta_{ij}$. Alors, $\forall f \in \mathbb{C}(G)$, on a la décomposition

$$f = \sum_{g \in G} f(g)\, e_g .$$

On peut alors donner une deuxième déf. de la régulière :

<u>Déf. 2</u> : $R \equiv \mathbb{C}(G)$, et $\rho_R(g)(f) \equiv f \circ g^{-1} \quad \forall f \in \mathbb{C}(G)$.

Pour voir que les deux déf. sont équivalentes, on note que

$$\rho_R(g) \cdot f = f \circ g^{-1} = \sum_{g'} f(g^{-1}g')\, e_{g'} = \sum_{g''} f(g'')\, e_{gg''}$$

donc $\rho_R(g)\, e_{g'} = e_{gg'}$.

À quoi nous sert cette nouvelle déf. plus abstraite ?
Réponse : Structure multiplicative de $\mathbb{C}(G)$, si f_1 et $f_2 \in \mathbb{C}(G)$ alors $f_1 + f_2 \in \mathbb{C}(G)$, et $f_1 * f_2 \in \mathbb{C}(G)$, où $f_1 * f_2 = \sum_{g_1, g_2} f_1(g_1 g_2^{-1}) f_2(g_2)\, e_{g_1}$

$\mathbb{C}(G)$ est un anneau.

$$f_1 * f_2 = \sum_{g_1, g_2} f_1(g_1 g_2^{-1}) f_2(g_2)\, e_{g_1} = \sum_{g_1', g_2} f_1(g_1') f_2(g_2)\, e_{g_1' g_2}$$

donc, $e_g\, e_h = e_{gh}$.

$\mathbb{C}(G)$: "anneau de groupe" $:= \{ \sum_g c_g\, e_g \}$ avec $e_g\, e_h = e_{gh}$

Anneaux

<u>Déf.</u>: Un anneaux $(R, +, \cdot)$ est un ensemble R muni de deux opérations $+ : R \times R \to R$ et $\cdot : R \times R \to R$ tel que :

1) $(R, +)$ est un groupe Abélien, avec identité notée "0".

2) $(R, \cdot)$ est un "monoïde" : - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

   - $\exists$ "1" $\in R$ tel que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \ \forall a \in R$

3) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

   $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$.

<u>Remarque</u> : Si $0 = 1$, alors R n'a qu'un élément.

<u>E.g.</u> : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}, \mathbb{C} \leftarrow$ corps (anneaux commutatifs où $\forall x \neq 0, \exists x^{-1} \in R$).

$\mathbb{C}[x] = \{$polynômes en x avec coeffs. en $\mathbb{C}\}$.

$\mathbb{C}(S_3)$. <u>E.g.</u> : $(a e_e + b e_{(12)} + c e_{(13)}) \cdot (e_{(13)}) = a e_{(13)} + b e_{(321)} + c e_e$

$0 \in \mathbb{C}(G)$, $1 = e_e$.

Modules

Modules

Soit R un anneau. Un R-module M de gauche est un ensemble M muni d'une opération $+ :$ ~~$R\times R$~~ $M\times M \to M$ et d'une action $\cdot : R\times M \to M$ tel que :

1) $(M,+)$ est un gp. Abélien

2) $\forall\, r, s \in R,\ x, y \in M$

2) $((r +_R s), x) = (r,x) +_R (s,x)$ $\qquad ((r+s)\cdot x = r\cdot x + s\cdot x)$

3) $(r,\ x +_M y) = (r,x) +_R (r,y)$ $\qquad (r\cdot(x+y) = r\cdot x + r\cdot y)$

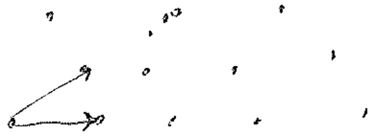
4) $(r \cdot_R s, x) = (r,(s,x))$ $\qquad ((r\cdot s)\cdot x = r\cdot(s\cdot x))$

5) $(1_R, x) = x$

E.g. : - Tout espace vectoriel

- $R = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$; $M = \mathbb{C}^n$

- un réseau



Prop. : Les représentations d'un gp. correspondent à des $\mathbb{C}[G]$-modu

Lemme : Toute repr. $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ s'étend par linéarité à un application $\bar\rho : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$ où

$$\bar\rho\Big(\sum_i c_i g_i\Big)(v) = \sum_i c_i\, \bar\rho(g_i)(v).$$

Toute applic. $\bar\rho : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$ se restreint à un $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$
G-homom

IV

(Optional) Prop. : $\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_i \mathrm{End}(V_i)$ pour $\{V_i\}$ un S.C.R.I.

Pour une repr. (ρ_V, V) on definit
$$\varphi_V : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$$
$$\sum_i c_i g_i \longmapsto \sum_i c_i \rho_V(g_i).$$

On choisi donc $\bigoplus (\rho_V, V) = \bigoplus_i (\rho_{V_i}, V_i)$ et φ tel que

$$\cancel{\varphi\left(\sum_j c_j g_j\right) = \bigoplus_i \sum_j c_j \rho_{V_i}(g_j)}$$

$$\varphi\left(\sum_a c_a g_a\right) = \sum_a c_a \bigoplus_i \rho_{V_i}(g_a) = \sum_a c_a \begin{pmatrix} \rho_{V_1}(g_a) & & \\ & \rho_{V_2}(g_a) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Alors, $\varphi(e) = \bigoplus_i \mathrm{id}_{V_i} \Rightarrow \varphi \neq 0$.

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] = |G| \qquad \dim_{\mathbb{C}}\left(\bigoplus \mathrm{End}(V_i)\right) = \sum_i (\dim V_i)^2 \underset{\text{Burnside}}{=} |G|.$$

$\square$

Produits tensoriels

Soient M_R un R-module de droite et $_RN$ un R-mod de gauche.

<u>Déf.</u> : $$M_R \underset{R}{\otimes} {_RN} = \{ (m,n) \mid m \in M_R,\ n \in {_RN} \} \big/ \text{rels.}$$

<u>rels.</u> : 1) $(m_1+m_2, n) = (m_1, n) + (m_2, n)$

2) $(m, n_1+n_2) = (m, n_1) + (m, n_2)$

3) $(m\cdot r, n) = (m, r\cdot n)$.

$M \underset{R}{\otimes} N$ est un gp. Abélien.

<u>Déf.</u> : Soit $_SM_R$ ~~ou~~ un $(S\text{-}R)$-bimodule, et $_RN$ un R-module à gauche.

On définit $_SM_R \underset{R}{\otimes} {_RN} = \{ (m,n) \mid m \in M,\ n \in N \}$ comme avant.

<u>Prop.</u> : $M \otimes N$ est un S-module à gauche ~~à travers~~ avec l'action de S $$s\cdot(m,n) = (s\cdot m, n).$$

~~Repr. induite~~

~~Soit $H \subset G$ un sous-gp de G, et (ρ_H, V_H) une repr. de H.~~

~~Alors V_H est un $\mathbb{C}[H]$-module à gauche.~~

~~$\mathbb{C}[G]$ est un bimodule sur lui-même, et $\mathbb{C}[H]$ est~~

La représentation induite

Soit $H \subset G$ un sous-gp. de G, et (ρ_H, V_H) une H-repr.

Alors, on a les propriétés suivantes :

1) V_H est un $\mathbb{C}[H]$-module à gauche
2) $\mathbb{C}[G]$ est un $(\mathbb{C}[G]-\mathbb{C}[G])$-bimodule
3) $\Rightarrow$ $\mathbb{C}[G]$ est aussi un $(\mathbb{C}[G]-\mathbb{C}[H])$-bimodule

On peut donc définir le $\mathbb{C}[G]$-module à gauche suivant :

<u>Déf.</u> : On définit $\mathbb{C}[G] \underset{\mathbb{C}[H]}{\otimes} V_H \equiv \mathrm{Ind}_H^G V_H$

~~Prop.~~ :

<u>Prop.</u> : $\mathrm{Ind}_H^G V_H$ est un $\mathbb{C}[G]$-module à gauche. Donc, il est une repr. de G. On l'appelle "représentation induite".

$$\mathbb{C}[G] \underset{\mathbb{C}[H]}{\otimes} V_H = \{ (g \otimes w \mid g \in G, w \in V_H \} / \text{rel})$$

rel : 1) $(g_1 + g_2) \otimes w = g_1 \otimes w + g_2 \otimes w$ 2) $g \otimes (w_1 + w_2) = g \otimes w_1 + g \otimes w_2$

3) $(gh) \otimes w = g \otimes (\underset{V_H}{\rho(h)} \cdot w) \quad \forall h \in H$.

L'action de $\mathbb{C}[G]$ à gauche est donnée par :

$$\underset{\mathrm{Ind}}{\rho}(g_1)(g_2 \otimes w) = (g_1 g_2) \otimes w.$$

La repr. induite

Soit $H \subset G$ deux gps, et (ρ_H, V_H) un rep. de H.

Choisons des représentants de $G/H = \{g_1, \dots, g_k\}$.

On définit l'espace vectoriel $V = \bigoplus_{g^i \in G/H} V^{g_i}$ où chaque $V^{g_i} \cong V_H$.

Alors, chaque $v \in V$ admet une décomposition unique $v = \sum_{g_i} g_i v_i$ où $v_i \in V$ et $g_i v_i$ est l'image de v_i en V^{g_i} sous l'isomorphisme "g_i"$: V \to V^{g_i}$.

Alors, $\forall g \in G$, $\exists\ g_{j(i)} \in G/H$ et un h tels que $g \cdot g_i = g_{j(i)} \cdot h$. On définit alors $\rho_{Ind}(g) \cdot (g_i v_i) \equiv g_{j(i)} \cdot (\rho_{V_H}(h) v_i)$

E.g.: $S_3 = \{e, \tau = (12), \tau\sigma = (23), \tau\sigma^2 = (13), \sigma = (123), \sigma^2 = (321)\}$

$H = \mathbb{Z}_3 = \{e, \sigma, \sigma^2\}$ $\qquad (\rho_H, V_H) = \{v\}$ w/ $\rho_H(\sigma^n) = \lambda_3^n$

$V = V_e \oplus V_\tau$
$\quad \langle v \rangle \quad \langle \tau v \rangle$ $\qquad \rho_{Ind\,H}(\sigma) \cdot v = \lambda v$ $\qquad$ ~~$\rho_I(\sigma)(\tau v) = \rho_I(\tau)(\sigma v)$~~

$\rho_I(\sigma) \cdot (\tau v) = ?$ $\qquad \sigma\tau = \tau\sigma^2 \Rightarrow \rho_I(\sigma)(\tau v) = \tau(\rho_H(\sigma^2)v) = \lambda_3^2 (\tau v)$

$\Rightarrow \rho_I(\sigma) = \begin{pmatrix} \lambda_3 & \\ & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$

E.g. : $G = S_3$, $H = \mathbb{Z}_3 = \{ e, \sigma = (123), \sigma^2 = (321) \}$

Prenons la repr. de H défini par $\rho : \sigma^n \longrightarrow \lambda_3^{\,n}$ où $\lambda_3^3 = 1$.

Donc $V_H = \mathbb{C} = \{ w \}$.

Écrivons les éléments de G ainsi :

$\{ e, \tau = (12) ; \tau\sigma = (23), \tau\sigma^2 = (13), \sigma = (123), \sigma^2 = (321) \}$.

Alors, pour définir une base pour $\mathrm{Ind}\, V_H = \mathbb{C}[S_3] \underset{\mathbb{C}[H]}{\otimes} V_H$,

On commence par l'inventaire des $g \otimes w$

$v_1 \equiv e \otimes w$, $\quad v_2 \equiv \tau \otimes w$, $\quad v_3 \equiv (\tau\sigma) \otimes w$

or $(\tau\sigma) \otimes w = \tau \otimes (\rho_{V_H}(\sigma) \cdot w)$ car $\sigma \in H \Rightarrow v_3 = \lambda_3 v_2$

$v_4 \equiv (\tau\sigma^2) \otimes w = \lambda_3^2 v_2$, $\underline{v_5 \equiv \sigma \otimes (w) = \lambda_3 v_1}$, $v_6 \equiv \sigma^2 \otimes w = \lambda_3^2 v_1$.

$\Rightarrow \mathrm{Ind}_H V_H \simeq \mathbb{C}^2 \langle v_1, v_2 \rangle$, avec l'action

$\rho_{\mathrm{Ind}}(\tau) \cdot v_1 \equiv \tau (e \otimes w) = \tau \otimes w = v_2$

$\rho_{\mathrm{Ind}}(\tau) \cdot v_2 \equiv \tau \cdot (\tau \otimes w) = e \otimes w = v_1 \qquad \Rightarrow \rho_{\mathrm{Ind}}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\rho_{\mathrm{Ind}}(\sigma) \cdot v_1 \equiv \sigma \cdot (e \otimes w) = \sigma \otimes w = e \otimes (\rho_H(\sigma) \cdot w) = e \otimes (\lambda_3 w) = \lambda_3 v_1$

$\rho_{\mathrm{Ind}}(\sigma) \cdot v_2 = \dots = \lambda_3^2 v_2$

$\Rightarrow \rho_{\mathrm{Ind}}(\sigma) = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Ind}_{\mathbb{Z}_3}^{S_3}(V_H) \cong V_2}$$

Prop. : Soit W une repr. de $H \subseteq G$, et U une rep de G. Posons $V = \mathrm{Ind}\, W$. Alors, tout homom. $\varphi : W \to U$ de H-modules s'étend uniquement à un homom. de G-mod., i.e.

$$\mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}\, U) = \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}(W), U).$$

$g \otimes w$ $\forall \varphi : W \to \mathrm{Res}\, U$, on définit

$$\tilde{\varphi} : g \otimes w \longmapsto g \otimes \varphi(w)$$

$$\mathrm{Hom}_G(V, U) = \mathrm{Hom}_G\Big(\mathbb{C}[G] \underset{\mathbb{C}[H]}{\otimes} W, U\Big) = \mathrm{Hom}_{G \times H}(\mathbb{C}G W, U) = \mathrm{Hom}_H(W, U)$$

Prop. : ~~$\mathrm{Ind}_{H_1}^{H_2}(\mathrm{Ind}_{H_3}^{H_2}(V))$~~ $\mathrm{Ind}_{H_2}^{G}(\mathrm{Ind}_{H_1}^{H_2}(V)) \cong \mathrm{Ind}_{H_1}^{G}(V)$.

Les partitions

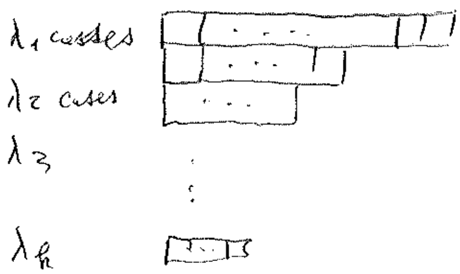
23/10/15 (1)

Déf. : Soit $n \in \mathbb{N}$. Une portion $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ avec $k \leq n$ est un ensemble de nombres naturels λ_i tels que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$.

On organise ces entiers en des vecteurs par ordre décroissant.

E.g. : $n = 5$, $(3,2,1)$, $(2,2,1)$, $(2,1,1,1)$ etc.

Déf. : Un diagramme de Young (ou diagramme de Ferrers), associé à une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ consiste en n cases organisées ainsi :



E.g. : $(3\ 2\ 1) \leftrightarrow$  ; $(2,2,1) \leftrightarrow$ ,

$(2,1,1,1) \leftrightarrow$ 

Déf. : Un ~~un~~ tableau de Young est un diagramme de Young où les cases sont numérotées.

On s'intéressera à la numérotation canonique, e.g.

1	2	3
4	5	
6		

Pour un tableau canonique, T, on définit l'action de S_n sur le tableau comme étant l'action qui permute les numéros :

E.g. : $(12)\cdot\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\qquad (123)\cdot\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$

Alors, on définit le sous-groupe $L(T) \subseteq S_n$

Déf. : $L(T) = \{ g \in S_n \mid g \cdot T \text{ préserve les lignes de } T \}$

E.g. : $\begin{array}{|c|c|c|l}\cline{1-3} 1 & 2 & 3 & \leftarrow S_3 \\ \cline{1-3} 4 & 5 & \multicolumn{2}{|l}{\leftarrow S_2} \\ \cline{1-2} 6 & \multicolumn{3}{|l}{\leftarrow S_1} \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\qquad L(T) = S_3 \times S_2 \times S_1 \subset S_6$

De même, on définit $C(T) = \{ g \in S_n \mid g \text{ préserve les colonnes de } T \}$

donc, pour $T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2} & \\ \cline{1-2}\end{array}$ $\qquad L(T) = S_3 \times S_2 \times S_2$

$C(T) = S_3 \times S_3 \times S_1$

Rappel : Soit G un groupe fini. L'"algèbre du groupe" $\mathbb{C}[G]$ est l'anneau de "combinaisons linéaires sur $\mathbb{C}$ d'élément de G", avec le produit du groupe.

E.g. : $G = S_3$, $\qquad (e + (12) + 5(123)) \cdot (2(23))$

$= 2(23) + 2(123) + 10\cdot(12$

Pour un tableau T associé à une partition λ de n, prenons l'anneau $\mathbb{C}[S_n]$. On définit alors deux éléments

$$a_\lambda \equiv \sum_{g \in L(T)} g \quad ; \quad b_\lambda \equiv \sum_{g \in C(T)} \operatorname{sgn}(g)\, g$$ et finalement

$c_\lambda \equiv a_\lambda \cdot b_\lambda \in \mathbb{C}[S_n]$. c_λ est le "symétriseur de Young".

E.g. : $G = S_3$, $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1} \end{array}$ $\quad L(T) = \underset{\{(12)\}}{S_2} \times S_1$

$C(T) = \underset{\{(13)\}}{S_2} \times S_1$

$\underset{a_{(2,1)}}{a_\lambda} = e + (12)$; $b_{(2,1)} = e - (13)$

$\boxed{c_{(2,1)}} = (e + (12))(e - (13)) = \boxed{e + (12) - (13) - (321)}$

~~Thm.~~ Def. : Soit $\mathbb{C}[S_n]$ l'algèbre de groupe de S_n et $c_\lambda \in \mathbb{C}[S_n]$ un symétriseur de Young. On définit le module à gauche $V_\lambda \equiv (\mathbb{C}[S_n]) \cdot c_\lambda$.

Thm. : V_λ est un repr. irréd. de S_n. Toute repr. irréd. peut s'écrire comme un tel V_λ.

E.g. : 1) $T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & \cdots & n \\ \hline\end{array}$ $\qquad a = \sum_{g \in G} g \; ; \; b = e$

$$L(T) = S_n \, , \quad C(T) = e .$$

$\Rightarrow ab = a \qquad V_\lambda = \mathbb{C}[S_n] \cdot a$. Prenons comme premier générateur $v_1 = e \cdot a = a \in V_\lambda$. $\forall g \in S_n$, $g \cdot v_1 = g \sum_{g'} g' = \sum_{g''} g'' = v_1$

$\Rightarrow V_\lambda \cong \mathbb{C}$ avec représentation triviale.

2) $T = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline\end{array}$ $\qquad a = e \leftrightarrow L(T) = e$

$$b = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(g) g \quad \text{car} \quad C(T) = S_n .$$

$\Rightarrow c = ab = b$

Prenons encore $v_1 = e \cdot b \in V_\lambda$. Alors, $\forall g \in S_n$

$$g \cdot v_1 = g \sum_{g' \in S_n} \mathrm{sgn}(g') g' = \mathrm{sgn}(g) \sum_{g'} \mathrm{sgn}(gg')(gg') = \mathrm{sgn}(g) v_1$$

$\Rightarrow V_\lambda \cong \mathbb{C}$ avec repr. <u>alternante</u>.

3) $T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\qquad c = e + (12) - (13) - (321)$

Prenons $v_1 = c$; $v_2 = (13) v_1 = (13) + (123) - e - (23)$

On note que $(12) v_1 = v_1$, $\quad (12) v_2 = -v_1 - v_2$

V

3) $G = S_3$, $T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}$; $a = e + (13)$, $b = e - (12)$

$c = e + (13) - (12) - (123)$

$V_\lambda = \mathbb{C}[S_3]\cdot c$

Prenons $v_1 = c$. On note que $(13)v_1 = v_1$.

$(12)\cdot v_1 = (12) + (321) - e - (23) \neq v_1 \quad \Rightarrow \quad (12)\cdot v_1 = v_2$.

$(123)\, v_1 = (123) + (23) - (13) - (321) = -v_1 - v_2$

$(123)\, v_2 = v_1 \qquad \Rightarrow \qquad V_\lambda = \langle v_1, v_2 \rangle$

$\rho((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad \rho((123)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |\mathbb{1}\lambda - \rho(123)| = (\lambda+1)\lambda + 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_\pm = \zeta_3, \zeta_3^2$ ✓.

$V_\lambda = V_{std}$.

En général ; $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \; & \cdots & & \\ \hline \; & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \leftrightarrow V_{std}$.

$2^{\text{ème}}$ construction de V_λ

On fixe un tableau T. On définit le polynome $F_T = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$ où i et j sont dans la même colonne du tableau.

L'ensemble de $F_T \leftrightarrow V_\lambda$.

E.g. : $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \; & \; & \; \\ \hline\end{array} \leftrightarrow F_T = 1$

$T = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array} \rightarrow F_T = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$

$T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array} \quad v_1 = F_T = (x_1 - x_3) \qquad v_2 = (12)v_1 = (x_2 - x_3)$

$(123)v_1 = -v_1 + v_2 \qquad (123)v_2 = (x_3 - x_1) = -v_1$

$= (x_2 - x_1)$

$\lambda_{\rho(123)\pm} = \zeta_3, \zeta_3^2$ ✓

Formule de dim(V_λ)

Pour tout diagramme, on définit un crochet par rapport à un case x comme étant l'ensemble de cases à droite de x sur la même ligne, en dessous de x dans la m̂ colonne, et x inclus.

Alors $$\dim(V_\lambda) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} \text{longueur}(\text{crochet}_i)}$$

E.g. : $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&2&1\\\hline\end{array} \longrightarrow \dim \quad \frac{3!}{3\cdot 2\cdot 1} = 1$

$\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 2\\\hline 1\\\hline\end{array} \longrightarrow \dim = 1$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array} \longrightarrow \dim = \frac{3!}{3\cdot 1\cdot 1} = 2$ ✓.

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&3&1\\\hline 2&1\\\cline{1-2}\end{array} \longrightarrow \dim = \frac{5!}{4\cdot 3\cdot 2} = 5$ ✓.

S_5.

Formule de Frobenius

Soit C_i la classe de conj. en S_d déterminée par le vecteur ~~partition~~ $i = (i_1, \dots, i_d)$ avec $\sum \alpha i_\alpha = d$

$C_i \rightarrow$ i_1 1-cycles, i_2 2-cycles, ..., i_d d-cycles.

Prenons des vars. $x_1, \dots, x_k$ où $k \geq$ # lignes dans λ.

Définissons : $P_j(x) = x_1^j + x_2^j + \dots + x_k^j$ $\quad 1 \leq j \leq d$

et $\Delta(x) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$

Pour toute série formelle $f(x_1, \dots, x_k)$ et tout k-uple d'éléments de $\mathbb{N}$,

$[f(x)]_{(i_1, \dots, i_k)} \equiv$ coeff. de $x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}$ en f.

Pour toute partition $\lambda : \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$ de d, définissons

$l_1 = \lambda_1 + k - 1, \; l_2 = \lambda_2 + k - 2, \; \dots, \; l_k = \lambda_k$.

Alors, le charactère de V_λ évalué en $g \in C_i$ est donné par

$$\chi_\lambda(C_i) = \left[\Delta(x) \cdot \prod_j P_j(x)^{i_j}\right]_{(l_1, \dots, l_k)}$$

E.g. : S_3, $\lambda = (2,1)$ $\rightarrow$ x_1, x_2 $\quad \Delta = (x_1 - x_2)$ $\quad P_i = x_1^i + x_2^i$

$l = (3,1)$

$[e] = C_{(3,0,0)}$ $\quad [(12)] = [(12)(3)] = C_{(1,1,0)}$; $[(123)] = C_{(0,0,1)}$

$\| \, (1)(2)(3)$

$\chi_{(2,1)}([e]) = [(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^3]_{(3,1)} = -1 + 3 = 2 = \dim V_{(2,1)}$ ✓

$\chi_{(2,1)}([(12)]) = [(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)]_{(3,1)} = -1 + 1 = 0$ ✓

$\chi_{(2,1)}([(123)]) = [(x_1 - x_2)(x_1^3 + x_2^3)]_{(3,1)} = -1$ $\quad \Rightarrow \quad (2 \;\; 0 \;\; -1)$ ✓

Dualité Schur-Weyl

Motivation : $V \otimes V \cong \mathrm{Sym}^2 V \oplus \Lambda^2 V$

On a une action à gauche de $GL(V)$, et une à droite de S_2. Sur $V\otimes V$, $GL(V)$ agit comme $v \otimes v \mapsto (g\cdot v)\otimes(g \cdot v)$ c.à.d, par l'image de l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(V) &\longrightarrow \mathrm{End}(V^{\otimes d}) \\ g &\longmapsto g\otimes \cdots \otimes g \end{aligned}$$

A droite on a $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)\cdot \sigma = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)}$

On définit les foncteurs de Schur $\mathbb{S}_\lambda V = \mathrm{Im}\left(c_\lambda |_{V^{\otimes d}} \right)$

e.g. : $\boxed{1 \cdots d}$, $V \rightsquigarrow \mathrm{Sym}^d V$

$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \vdots \\ d \\ \hline \end{array}$, $V \rightsquigarrow \Lambda^d V$

$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}$, $V \rightsquigarrow v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 + v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 - v_3 \otimes v_2 \otimes v_1 - v_3 \otimes v_1 \otimes v_2$.

On peut aussi écrire : $\mathbb{S}_\lambda V = V^{\otimes d} \otimes_A V_\lambda$ où $A = \mathbb{C}[S_n]$
et $V_\lambda = A \cdot c_\lambda$

La dualité Schur-Weyl : $V^{\otimes d} = \bigoplus_\lambda \mathbb{S}_\lambda S \otimes_\sigma V_\lambda$

$$\cong \bigoplus_\lambda \left(\mathbb{S}_\lambda S\right)^{\oplus \dim(V_\lambda)}$$

E.g. : $V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}^3 V \oplus \Lambda^3 V \oplus \left(\mathbb{S}_{(2,1)} V\right)^{\oplus 2}$

Littlewood - Richardson

Prélim. : $\dim S_\lambda V = \prod_{\text{cases}} \frac{(k-i+j)}{h_{ij}}$ où (i,j) = coord. de la case

h = hook lgth.

$k = \dim V$

E.g. : SL_2 $\square \to \dim V = 2 \leftrightarrow$ spin $\frac{1}{2}$

$\dim(V) = 2$

$\square\square$, $\prod(k-i+j)$ $\boxed{2|3} = 2\cdot 3$, $\prod h_{ij}$ $\boxed{2|1} = 2$

dim = 3 $\leftrightarrow$ spin 1

$\overbrace{\square\cdots\square}^{k} \to \underbrace{\boxed{2\ 3\ \cdots\ k+1}}_{(k+1)!}$, $\underbrace{\boxed{k\ \ k-1\ \cdots\ 1}}_{k!}$

dim = $k+1 = 2j+1 \Rightarrow$ spin $j = \frac{k}{2}$

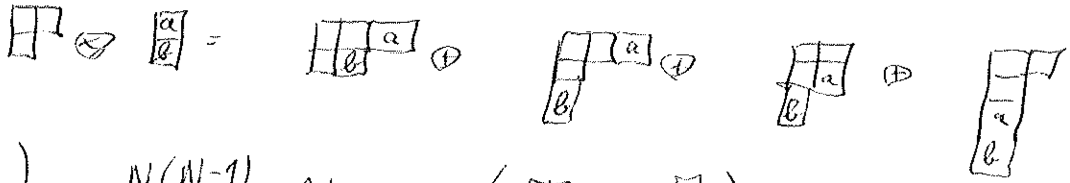
L-R

1) On étiquette le 2è diag. en mettant des a dans les cases de la 1ère ligne, b ds la 2è, etc...

2) On "colle" les cases a au 1er diag. de façon à former un diag. "admissible" de Young., mais jamais plus d'un "a" par colonne

3) On colle les b suivant la règle suivante :
en lisant en "Arabe", $\# b \leq \# a$ à chaque instant.

E.g. :



$\dim\left(\boxminus \otimes \square\right) = \frac{N(N-1)}{2} \times N = \dim\left(\square\!\square\!\!\!\!\;\; \oplus \boxminus\right) = \frac{N(N^2-1)}{3} + \frac{N(N-1)(N-2)}{6}$ ✓