Théorie de la Gravitation - Exercices notés - Novembre 2023

Guidelines
Vous êtes libres d'utiliser n'importe quelle ressource pour répondre aux questions. Vous êtes encouragés à collaborer avec les autres étudiants. Les réponses doivent être rédigées individuellement et refléter votre propre compréhension du problème. Les copies doivent être transmises pour le 21 décembre 2023 avant minuit par email à *sdetourn@ulb.ac.be* et *quentin.vandermiers@ulb.be*.

A. Théorie de Kaluza-Klein

L'idée fondamentale de la relativité générale consiste en la reformulation de l'interaction gravitationnelle en termes géométriques. Celle-ci ne se manifeste plus comme une force en tant que telle, mais plutôt comme une courbure de l'espace-temps. Ceci a amené, peu de temps après la publication des travaux d'Einstein en 1915, aux questions suivantes : les autres interactions ont-elles également une formulation géométrique ? Est-il possible de les unifier avec la gravitation ? Des contributions importantes dans ce domaine ont été apportées par T. Kaluza dès 1919 et O. Klein en 1926. Le but de cet exercice est d'en aborder les grandes lignes.

L'idée de Kaluza-Klein est de considérer la théorie d'Einstein en une dimension supérieure, c'est-à-dire à 4+1 dimensions au lieu de 3+1. Comme nous l'avons vu au cours, les équations d'Einstein découlent d'un principe variationnel pour l'action d'Einstein-Hilbert. A 5 dimensions, l'action est donc

$$\hat{S} = \frac{1}{8\pi\hat{G}} \int d^5x \sqrt{-\hat{g}}\hat{R} \tag{1}$$

où les quantités avec un chapeau se réfèrent à des grandeurs à 5 dimensions. Les coordonnées sur cet espace à 5 dimensions sont notées $x^M = (x^\mu, z)$, où $\mu = 0, 1, 2, 3$ et la dimension supplémentaire z est supposée compacte. Nous supposerons que l'espace-temps est de la forme $X_4 \times S^1$, où X_4 est une variété à 4 dimensions, et S^1 un cercle de rayon L. Avec cette hypothèse, la métrique de la théorie peut être décomposée en série de Fourier comme

$$\hat{g}_{MN}(x^\mu, z) = \sum_n g^{(n)}_{MN}(x^\mu) e^{inz/L}. \tag{2}$$

Vue du point de vue (3+1)-dimensionnel, cette décomposition donne lieu à une infinité de champs $g^{(n)}_{MN}(x^\mu)$, un pour chaque valeur de n. Nous allons d'abord montrer sur un exemple simplifié que les modes avec $n \neq 0$ sont associés à des modes massifs, tandis que les modes $n = 0$ sont massless.

(1) On considère l'équation de Klein-Gordon sans masse à 5 dimensions :

$$\hat{\Box}\hat{\phi}(x^\mu, z) = 0 \tag{3}$$

En utilisant la décomposition

$$\hat{\phi}(x^\mu, z) = \sum_n \phi_n(x^\mu) e^{inz/L}. \tag{4}$$

pour le champ scalaire à 5 dimensions, montrer que chaque mode de Fourier ϕ_n satisfait à une équation de Klein-Gordon à 4 dimensions avec une masse donnée par

$$m_n^2 = \frac{n^2}{L^2} \tag{5}$$

On tire du résultat précédent que l'équation de Klein-Gordon à 5 dimensions donne lieu à un scalaire massless à 4 dimensions et à un nombre infini de scalaires massifs. La philosophie générale des théories de Kaluza-Klein est de supposer que la dimension supplémentaire est très petite (sinon nous la verrions !), typiquement de l'ordre de la longueur de Planck ($L \sim 10^{-33}$cm). Par conséquent, les masses des modes massifs sont gigantesques, bien plus grandes que celles des particules auxquelles nous avons accès dans nos accélérateurs, et ces modes massifs (dits de Kaluza-Klein) peuvent être négligés.

(2) On paramétrise la métrique à 5 dimensions comme

$$d\hat{s}^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + (dz + A_\mu dx^\mu)^2, \tag{6}$$

où d'après l'exercice précédent, $g_{\mu\nu}$ et A_μ ne dépendent que des coordonnées x^μ. On a $\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu$, $\hat{g}_{\mu z} = A_\mu$, $g_{zz} = 1$, $\hat{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$, $\hat{g}^{\mu z} = -A^\mu$ et $g^{zz} = 1 + A_\mu A^\mu$.

(2.a) Exprimer les symboles de Christoffel à 5 dimensions en fonction des quantités à 4 dimensions. Montrer que

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} &= \Gamma^\mu_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}(F^\mu_\nu A_\lambda + F^\mu_\lambda A_\nu) &(7)\\
\hat{\Gamma}^z_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2}B_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}A^\mu(F_{\nu\mu}A_\lambda + F_{\lambda\mu}A_\nu) - A_\mu\Gamma^\mu_{\nu\lambda} &(8)\\
\hat{\Gamma}^\mu_{z\lambda} &= -\frac{1}{2}F^\mu_\lambda &(9)\\
\hat{\Gamma}^z_{z\mu} &= -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}A^\nu &(10)\\
\hat{\Gamma}^\mu_{zz} &= \hat{\Gamma}^z_{zz} = 0, &(11)
\end{aligned}$$

avec $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ et $B_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu$.

(2.b) Après avoir calculé les composantes du tenseur de Riemann, montrer que les composantes du tenseur de Ricci sont

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}F_\mu{}^\rho F_{\rho\nu} + \frac{1}{4}F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}A_\mu A_\nu + \frac{1}{2}(A_\nu\nabla_\rho F_\mu{}^\rho + A_\mu\nabla_\rho F_\nu{}^\rho) &(12)\\
\hat{R}_{z\mu} &= \frac{1}{2}\nabla_\nu F_\mu{}^\nu + \frac{1}{4}A_\mu F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho} &(13)\\
\hat{R}_{zz} &= \frac{1}{4}F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}. &(14)
\end{aligned}$$

(2.c) Montrer que le scalaire de Ricci à 5 dimensions s'écrit simplement comme

$$\hat{R} = R - \frac{1}{4}F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}. \tag{15}$$

(2.d) Montrer que si l'on remplace A_μ par λA_μ dans (6) (pour une constante λ fixée), l'équation (15) devient

$$\hat{R} = R - \frac{\lambda^2}{4}F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}. \tag{16}$$

(2.e) Montrer à présent que l'action d'Einstein-Hilbert à 5 dimensions (1) peut se réécrire comme

$$\hat{S} = \frac{1}{8\pi G} \int \sqrt{-g} d^4x \, R - \frac{1}{4} \int \sqrt{-g} \, d^4x \; F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho}, \tag{17}$$

avec

$$G = \frac{\hat{G}}{2\pi L}, \quad \lambda^2 = 8\pi G. \tag{18}$$

L'action (20) est précisément celle d'Einstein-Maxwell, c'est-à-dire décrivant la gravitation couplée à l'électromagnétisme. Le fait qu'elle ait pu être obtenue à partir d'une théorie de gravitation pure en dimension supérieure est parfois appelé le *miracle de Kaluza-Klein*.

(3) Le résultat de l'exercice précédent semble indiquer que nous avons unifié la gravitation d'Einstein avec l'électromagnétisme de Maxwell, au moins au niveau classique. Bien qu'encourageant, il se heurte néanmoins à un écueil. Montrer que les équations du mouvement découlant de (1) et de (20) ne sont en fait pas équivalentes en général. Pourquoi est-ce le cas ? [On dit que la théorie d'Einstein-Maxwell *n'est pas une troncation cohérente* de la gravité à 5 dimensions.]

B. Théorie effective en théorie des cordes

On considère un modèle décrivant la dynamique d'une métrique et d'une 2-forme B ($H = dB$) (inspiré de la théorie des cordes, en omettant le dilaton) à 2+1 dimensions. L'action est donnée par

$$S = \int \sqrt{-g} \, d^3x \, (R - \frac{1}{12} H^2) = \int (R \star 1 - \frac{1}{2} \star H \wedge H) \tag{19}$$

(1) Ecrire les équations du mouvement pour la métrique et pour le champ B pour cette action.

(2) En considérant une métrique de la forme

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\phi^2 \tag{20}$$

et un champ $B = h(r) dt \wedge d\phi$, déterminez les fonctions f et h résolvant les équations du mouvement.

(3) Calculez la courbure scalaire de la solution. Quel est le lien entre le champ B et la constante cosmologique effective de ce modèle ?